Über eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Gruppe des Doppelverhältnisses

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht
am 2. September 1938

von

Paul Etzel
aus München

Über eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Gruppe des Doppelverhältnisses

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht
am 2. September 1938

von

Paul Etzel
aus München

Berichterstatter: Geheimrat Dr. H. Tietze
Tag der mündlichen Prüfung: 20. Dezember 1938

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meiner lieben Mutter

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548304_0181

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 1

I. Kapitel

§ 1. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Geraden und seine Abhängigkeit von der Anordnung der Punkte ... 3

§ 2. Aufstellung eines dem Doppelverhältnis V_2 der Geraden analogen Begriffes in der Ebene 6

§ 3. Aufstellung eines dem Doppelverhältnis der Geraden analogen Begriffes im Raum 14

§ 4. Andeutung, wie sich im n-dimensionalen Raum die analogen Begriffe formulieren lassen 21

II. Kapitel

§ 5. Betrachtung der Transformationsgruppen $\mathcal{G}^{(n)}$ und Aufstellung zugehöriger Fundamentalbereiche 25

§ 6. Die Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(1)}$. Fundamentalbereiche..... 26

§ 7. Untersuchung der Gruppe $\mathcal{G}^{(2)}$ im zweidimensionalen Fall 27

§ 8. Untersuchung der Gruppe $\mathcal{G}^{(3)}$ im dreidimensionalen Fall 42

§ 9. Ausblick auf das Problem der Auffindung eines Fundamentalbereiches der Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ für $n > 3$ 66

Einleitung.

1) Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich damit, gewisse Eigenschaften des Doppelverhältnisses von 4 Punkten einer Geraden zu übertragen auf Verhältnisse, die 5 Punkten einer Ebene, oder 6 Punkten eines dreidimensionalen Raumes, allgemein (n+3) Punkten eines n-dimensionalen Raumes zugeordnet werden können. So wie bekanntlich bei Änderung der Anordnung von 4 Punkten einer Geraden das Doppelverhältnis dieser 4 Punkte Änderungen erfährt, die eine Gruppe $\mathcal{G}^{(1)}$ von 6 Transformationen liefern, so ergibt sich auch bei den genannten allgemeineren Verhältnissen eine endliche Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ derjenigen Transformationen, die hervorgerufen werden durch Änderungen dieser Verhältnisse vermöge Permutation der (n+3) Punkte. Die vorliegende Arbeit befasst sich weiter mit dem Problem, für $n > 1$ zu der Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ gehörige, einfache Fundamentalbereiche zu finden, also solche Bereiche des n-dimensionalen, projektiven Raumes, die bei den Transformationen von $\mathcal{G}^{(n)}$ in andere Teilbereiche des Raumes übergehen, so zwar, dass diese Teilbereiche zusammengenommen den ganzen Raum einfach überdecken. Dieses Problem kann sowohl für den reellen, wie für den komplexen projektiven n-dimensionalen Raum gestellt werden (vgl. wegen $n = 1$ auch Nr.4). Die folgenden Untersuchungen beschränken sich jedoch auf das Reelle.

2) Die näheren Betrachtungen zeigen, dass sich die Ergebnisse für $n > 1$ in mancher Hinsicht gegenüber dem bekannten Fall $n = 1$ anders gestalten. Für $n = 1$ liefern ja die $4! = 24$ Anordnungen der 4 Punkte nicht 24 verschiedene Werte des Doppelverhältnisses, sondern deren nur 6 (die Werte sind, wenn $y_1 : y_2$ das Doppelverhältnis einer anfänglichen Punkteanordnung ist, $y_1 : y_2$; $y_2 : y_1$; $y_2 : (y_2 - y_1)$; $(y_2 - y_1) : y_2$; $(y_1 - y_2) : y_1$; $y_1 : (y_1 - y_2)$;). Die Gruppe dieser 6 Transformationen

ist mehrstufig isomorph zur Gruppe der Permutationen von 4 Punkten. Für $n = 2$ lernen wir $5! = 120$ dreifache Verhältnisse „$y_1 : y_2 : y_3$", für $n = 3$ analog $6! = 720$ vierfache Verhältnisse „$y_1 : y_2 : y_3 : y_4$" kennen, für allgemeines n ergeben sich $(n+1)$-fache Verhältnisse „$y_1 : y_2 : \ldots\ldots : y_n : y_{n+1}$" in der Anzahl $(n+3)!$. Die von diesen Verhältnissen gebildete Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ ist nun aber für alle $n > 1$ e i n s t u f i g isomorph zur Gruppe der Permutationen von $(n+3)$ Punkten.

3) Die Transformationen sind für $n = 1$ alle linear. Für $n > 1$ haben wir es jedoch im allgemeinen mit umkehrbaren Transformationen n-ten Grades, sogenannten Cremona-Transformationen zu tun, denen sich aber in jedem Fall eine Anzahl linearer Transformationen zugesellt.

4) Für die Transformationen der Gruppe $\mathcal{G}^{(1)}$ lässt sich bekanntlich im Komplexen sowohl, wie auch im Reellen ein Fundamentalbereich angeben, ein Bereich also, der bei den 6 Transformationen von $\mathcal{G}^{(1)}$ in 6 Bereiche übergeht, deren Summe die komplexe Ebene, bezw. die Zahlengerade - bis auf die Grenzen der Bereiche - einmal lückenlos überdeckt (§ 6). Für die Gruppen $\mathcal{G}^{(n)}$ wurde in der vorliegenden Arbeit ein Fundamentalbereich ermittelt für $n = 2$ und $n = 3$, jedoch nur für reelle Werte der Veränderlichen. Nicht gelungen ist es dagegen für $n > 3$ einen Fundamentalbereich im Reellen zu finden. Im Komplexen ist das Problem ungelöst für alle $n > 1$.

5) Die Arbeit ist so aufgebaut, dass in einem I.Kapitel in den §§ 1, 2, 3 die Gruppen $\mathcal{G}^{(1)}$, $\mathcal{G}^{(2)}$, $\mathcal{G}^{(3)}$ und in § 4 allgemein $\mathcal{G}^{(n)}$ aufgestellt werden. Im II.Kapitel werden in § 6 die bekannten Tatsachen über den Fundamentalbereich der Gruppe $\mathcal{G}^{(1)}$ gebracht, worauf in den §§ 7 und 8 die Frage nach einem Funda-

mentalbereich für die Gruppen $\mathcal{G}^{(2)}$ und $\mathcal{G}^{(3)}$ behandelt wird. Der § 9 bietet noch eine Übersicht, wie weit für die Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ das Problem der Auffindung eines Fundamentalbereiche schon gelöst ist und was noch der Lösung bedarf.

I. Kapitel.

§ 1. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Geraden und seine Abhängigkeit von der Anordnung der Punkte.

6) Wir stellen in diesem § 1 die bekannten Tatsachen über die oben (Nr.1) mit $\mathcal{G}^{(1)}$ bezeichnete Gruppe zusammen.

Die Punkte einer Geraden seien durch ein homogenes Koordinatensystem festgelegt, so dass jedem Punkt ein Zahlenpaar (x_1, x_2) entspricht, dessen beide Zahlen nicht gleichzeitig Null werden dürfen.

Unter dem Doppelverhältnis DV oder V_2 von 4 Punkten P', P", P"', $P^{(4)}$ dieser Geraden in der angegebenen Reihenfolge, wofür abkürzend

$$V_2(x_1':x_2',\ x_1'':x_2'',\ x_1''':x_2''',\ x_1^{(4)}:x_2^{(4)}) = V(x',x'',x''',x^{(4)})$$

geschrieben werden soll, sei folgender Ausdruck verstanden: $V_2(x', x'', x''', x^{(4)}) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix}\right) : \left(\begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix}\right) = y_1 : y_2$$

wobei z.B. $(x') = (x_1', x_2')$ die Koordinaten von P' sind.

Das Doppelverhältnis erscheint also in der Gestalt des Verhältnisses zweier Zahlen y_1 und y_2. Hält man P', P", P"' fest, so ist das Zahlenpaar (y_1, y_2) eindeutig durch die Wahl des letzten Punktes $P^{(4)}$ mit den Koordinaten $(x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$ festgelegt. Setzt man

dabei noch voraus, dass von den 3 Punkten P', P", P"' keine 2 zusammenfallen, so entspricht jedem Zahlenpaar $(x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$ eindeutig ein Zahlenpaar (y_1, y_2) und umgekehrt, und das Zahlenpaar (y_1, y_2) kann nie den Wert (0, 0) annehmen, wie das ja auch für $(x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$ schon ausgeschlossen war.

Lässt man $P^{(4)}$ mit P', P", P"' zusammenfallen, so erhält man für das Verhältnis $(y_1 : y_2)$ bezüglich die Werte (1:0), (0:1) und (1:1). Die (y_1, y_2) sind also nicht anderes als neue projektive Koordinaten des Punktes $P^{(4)}$, wenn P' und P" als Grundpunkte und P"' als Einheitspunkt gewählt werden.

7) Die weitere Untersuchung des Doppelverhältnisses verläuft bekanntlich folgendermaßen: Man überzeugt sich, dass es für den Wert des Doppelverhältnisses auf die Anordnung der 4 Punkte ankommt. Vertauscht man z.B. P' mit P", so erhält man: $V_2(x",x',x"',x^{(4)}) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix}\right) : \left(\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix}\right) = y_2 : y_1 ;$$

also das Reziproke vom Ursprünglichen.

Die Betrachtung des Ausdruckes für das V_2 zeigt weiter, dass die Permutation $(P', P")(P"', P^{(4)})$ d.h. die Vertauschung von P' mit P" und von P"' mit $P^{(4)}$, analog jede der Permutationen $(P', P"')(P", P^{(4)})$ und $(P', P^{(4)})(P", P"')$ den Wert des V_2 unverändert lässt.

Die 24 Werte des V_2, die sich zugehörig zu den 24 Permutationen der 4 Punkte P', P", P"', $P^{(4)}$ ergeben, bilden eine zu dieser Permutationsgruppe isomorphe Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(1)}$ (vgl. Nr.1). 4 Elemente dieser Transformationsgruppe sind einander gleich, folglich kann sie nur aus höchstens $\frac{24}{4} = 6$ verschiedenen Elementen bestehen. Zwei von

ihnen sind schon bekannt:

1) $Y_1 : Y_2 = y_1 : y_2$; 2) $Y_1 : Y_2 = y_2 : y_1$

Eine weitere Transformation ergibt sich bei Vertauschung von P" mit P''' .

3) $V_2(x', x''', x'', x^{(4)}) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1''' & x_2''' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix} \right) : \left(\begin{vmatrix} x_1''' & x_2''' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix} \right) = (y_2 - y_1) : y_2$$

ein Ergebnis, zu dem man unter Verwendung der bekannten Relation

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1''' & x_2''' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' \\ x_1''' & x_2''' \end{vmatrix} = 0$$

gelangt. (Durch eine analoge Relation sind übrigens auch die Linienkoordinaten p_{ik} der Geraden im Raum miteinander verbunden.)

Die noch fehlenden Transformationen sind jetzt leicht anzugeben, wenn man zu ihrer Darstellung die drei schon bekannten Transformationen benützt:

4) $V_2(x''', x'', x', x^{(4)}) = y_1 : (y_1 - y_2)$;

5) $V_2(x'', x''', x', x^{(4)}) = (y_1 - y_2) : y_1$;

6) $V_2(x''', x', x'', x^{(4)}) = y_2 : (y_2 - y_1)$

Der Isomorphismus zwischen Transformations- und Permutationsgruppe ist mehrstufig, da ja $\mathfrak{G}^{(4)}$ nur 6 Elemente enthält.

§ 2. Aufstellung eines dem Doppelverhältnis V_2 der Geraden analogen Begriffes in der Ebene.

8) Die Punkte der Ebene mögen festgelegt sein durch homogene Dreieckskoordinaten, so dass jedem Punkt P ein Zahlentripel $(x_1 : x_2 : x_3)$ entspricht, das der Einschränkung $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ unterworfen ist.

Wir fassen 5 Punkte P', P", P"', $P^{(4)}$ und $P^{(5)}$ mit den Koordinaten $(x') = (x'_1, x'_2, x'_3)$, $(x")$, $(x"')$, $(x^{(4)})$ und $(x^{(5)})$ ins Auge. Unter dem dreifachen Verhältnis V_3 dieser 5 Punkte in der angegebenen Reihenfolge sei folgender Ausdruck verstanden:

$$V_3(P', P", P"', P^{(4)}, P^{(5)}) = y_1 : y_2 : y_3 =$$

$$= (\Delta_{523} \cdot \Delta_{143} \cdot \Delta_{124}) : (\Delta_{423} \cdot \Delta_{153} \cdot \Delta_{124}) :$$

$$: (\Delta_{423} \cdot \Delta_{143} \cdot \Delta_{125});$$

wobei das Symbol $\Delta_{\lambda,\mu,\nu}$ als Abkürzung für die aus den Koordinaten der drei Punkte $P^{(\lambda)}$, $P^{(\mu)}$, $P^{(\nu)}$ gebildete Determinante:

$$\Delta_{\lambda,\mu,\nu} = \begin{vmatrix} x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} \\ x_1^{(\mu)} & x_2^{(\mu)} & x_3^{(\mu)} \\ x_1^{(\nu)} & x_2^{(\nu)} & x_3^{(\nu)} \end{vmatrix}$$ verwendet wird.

Das dreifache Verhältnis V_3 der 5 Punkte erscheint somit in der Gestalt des Verhältnisses dreier Zahlen y_1, y_2, y_3 und dieses Zahlentripel y_1, y_2, y_3 ist eindeutig durch die Wahl des Punktes $P^{(5)}$ festgelegt, wofern man die Punkte P', P", P", $P^{(4)}$ festhält und $P^{(5)}$ variieren lässt. Setzt man dazu noch voraus, dass von den 4 festgehaltenen Punkten keine drei auf einer Geraden liegen, so kann $y_1 : y_2 : y_3$ nie den

Wert Q:0:0 annehmen und es entspricht dann auch umgekehrt jedem Zahlentripel (y_1, y_2, y_3) eindeutig ein Tripel $(x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)})$; denn das für die Auflösung nach den $(x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)})$ maßgebliche Gleichungssystem ist in den $_2(x^{(5)})$ linear und hat die Determinante $|A_{ik}| = \Delta_{123}$; $(i, k = 1,2,3)$, wobei unter den A_{ik} die Minoren der Determinante Δ_{123} zu verstehen sind. Δ_{123} ist aber nach Voraussetzung von Null verschieden. Die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems steht damit fest,

Fällt insbesondere $P^{(5)}$ nacheinander mit P', P", P"' oder $P^{(4)}$ zusammen, so erhält man für das dreifache Verhältnis nacheinander die Werte

1:0:0 0:1:0 0:0:1 und 1:1:1

Die $y_1: y_2: y_3$ sind also nichts anderes als die projektiven Koordinaten des Punktes $P^{(5)}$, wenn P', P", P"' als Grundpunkte und $P^{(4)}$ als Einheitspunkt gewählt werden.

Um die folgenden Betrachtungen einfacher zu gestalten, ist es zweckmäßig den Ausdruck für V_3 ein wenig umzuformen.

$$V_3(P',P'',P''',P^{(4)},P^{(5)}) = y_1: y_2: y_3 =$$

$$= \frac{\Delta_{523}}{\Delta_{423}} : \frac{\Delta_{153}}{\Delta_{143}} : \frac{\Delta_{125}}{\Delta_{124}}$$

Diese Umformung ist möglich, weil die Δ_{423}, Δ_{143}, Δ_{124} alle nach Voraussetzung von Null verschieden sind.

9) Der Wert des V_3 von 5 Punkten ist - wie man sich überzeugt - von der Anordnung der Punkte abhängig. Die Gesamtheit der V_3 von 5 Punkten, abhängig von deren Anordnung, bildet, analog dem linearen Fall eine Trans-

formationsgruppe $\mathcal{G}^{(24)}$, die zur Permutationsgruppe dieser 5 Punkte isomorph ist und die wir nun studieren wollen.

Wir wollen zuerst gewisse einfachere Elemente dieser Gruppe aufsuchen, nämlich diejenigen, die entstehen, wenn man in der Punkteanordnung nur die ersten drei und die letzten zwei Punkte unter sich vertausch Diese Elemente bilden zusammen eine Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(12)}$ von $\mathcal{G}^{(24)}$. Bei Vertauschung nur der ersten drei Punkte erhält man zunächst folgende Transformationen

$$V_3(P',P'',P''',P^{(4)},P^{(5)}) = y_1 : y_2 : y_3 \quad (E)$$

$$V_3(P'',P',P''',P^{(4)},P^{(5)}) = y_2 : y_1 : y_3 \quad (R)$$

$$V_3(P''',P'',P',P^{(4)},P^{(5)}) = y_3 : y_2 : y_1 \quad (S)$$

$$V_3(P''',P',P'',P^{(4)},P^{(5)}) = y_3 : y_1 : y_2 \quad (SR)$$

$$V_3(P'',P''',P',P^{(4)},P^{(5)}) = y_2 : y_3 : y_1 \quad (RS)$$

$$V_3(P',P''',P'',P^{(4)},P^{(5)}) = y_1 : y_3 : y_2 \quad (RSR)$$

Die Transformationen sind mit Buchstaben (E = Einheitstransformation, R, S) bezeichnet. Unter der zusammengesetzten Transformation SR etwa soll diejenige Transformatiom verstanden werden, die entsteht, wenn zuerst R und dann S ausgeführt wird.

Diese 6 eben angegebenen Transformationen bilden für sich eine Untergruppe $\mathcal{G}_2^{(12)}$ von $\mathcal{G}_1^{(12)}$. Zu ihnen gesellen sich, um die Gruppe $\mathcal{G}_1^{(24)}$ vollzumachen 6 Transformationen der Nebengruppe $\mathcal{G}_2^{(12)} \cdot T$, wobei unter T jene Transformation verstanden sein soll, welche entsteht, wenn man in der Punkteanordnung $P^{(4)}$ mit $P^{(5)}$ vertauscht.

$$V_3(P',P'',P''',P^{(5)},P^{(4)}) = \frac{\Delta_{423}}{\Delta_{523}} : \frac{\Delta_{143}}{\Delta_{153}} : \frac{\Delta_{124}}{\Delta_{125}} =$$

$$= \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} \quad (T)$$

Die Gruppe $\mathcal{G}^{(2)}$ denken wir uns jetzt nach Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ geordnet. Dazu brauchen wir neue Transformationen von $\mathcal{G}^{(2)}$, die nicht schon in $\mathcal{G}_1^{(2)}$ vorkommen und die auch nicht zu je zweien dieselbe Nebengruppe bestimmen.

Eine Vertauschung von P' mit $P^{(5)}$ in der anfänglichen Punkteanordnung liefert e i n e solche neue Transformation (U).

$$V_3(P^{(5)},P'',P''',P^{(4)},P') = \frac{\Delta_{123}}{\Delta_{423}} : \frac{\Delta_{513}}{\Delta_{543}} : \frac{\Delta_{521}}{\Delta_{524}} \quad (U)$$

Die explizite Darstellung von U wird in Nr.10 dieses Paragraphen angegeben.

Weitere geeignete Transformationen erhält man nun, wenn man in der Punkteanordnung immer andere drei aus den 5 Punkten an die ersten drei Stellen setzt. Dieses Verfahren führt zu nachfolgenden dreifachen Verhältnissen, deren Darstellung durch die eingeführten, mit Buchstaben bezeichneten dreifachen Verhältnisse beigefügt ist.

$V_3(P^{(4)},P'',P''',P',P^{(5)})$	ist	TUT
$V_3(P',P^{(4)},P''',P'',P^{(5)})$	ist	RTURT
$V_3(P',P'',P^{(4)},P''',P^{(5)})$	ist	STUST
$V_3(P^{(5)},P^{(4)},P''',P'',P')$	ist	RTURTU
$V_3(P',P^{(5)},P''',P^{(4)},P'')$	ist	RUR
$V_3(P',P'',P^{(5)},P^{(4)},P''')$	ist	SUS
$V_3(P',P^{(5)},P^{(4)},P''',P'')$	ist	STUST·RUR
$V_3(P^{(5)},P'',P^{(4)},P''',P')$	ist	STUST·U

Zusammenfassend stellen wir fest, dass damit die Gruppe $\mathcal{G}^{(2)}$ zerlegt ist in 10 rechtsseitige Nebengruppen der Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(2)}$ von folgendem Aussehen.

$$\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{G}_1^{(2)} + \mathcal{G}_1^{(2)}U + \mathcal{G}_1^{(2)}TUT + \mathcal{G}_1^{(2)}RUR + \mathcal{G}_1^{(2)}RTURT + \mathcal{G}_1^{(2)}SUS$$
$$+ \mathcal{G}_1^{(2)}STUST + \mathcal{G}_1^{(2)}STUSTRUR + \mathcal{G}_1^{(2)}RTURTU + \mathcal{G}_1^{(2)}STUSTU$$

Durch diese Zerlegung sind aber auch alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}^{(2)}$ erfasst, denn es sind 10 Nebengruppen mit je 12 Elementen, zusammen also 120, wie es sein muss und von den isomorphen Permutationsnebengruppen sind keine zwei einander gleich.

10) Es handelt sich jetzt darum, die explizite Darstellung der Transformation U zu finden. U hatte, ausgedrückt durch die Δ_{ikl} die Form

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 = \frac{\Delta_{123}}{\Delta_{423}} : \frac{\Delta_{315}}{\Delta_{345}} : \frac{\Delta_{215}}{\Delta_{245}} \qquad (U)$$

In diesem Ausdruck kommen neue Determinanten vor, die in der Transformation (E) nicht verwendet waren: Δ_{123}, Δ_{345}, Δ_{245}. Diese gilt es durch die in (E) vorkommenden auszudrücken. Man benötigt dazu Beziehungen zwischen den $\binom{5}{3} = 10$ möglichen Determinenten Δ_{ikl}. In der Tat existieren 5 Relationen folgenden Aussehens:

1) $\Delta_{123} \cdot \Delta_{134} - \Delta_{124} \cdot \Delta_{135} + \Delta_{125} \cdot \Delta_{134} = 0$

2) $\Delta_{213} \cdot \Delta_{245} - \Delta_{214} \cdot \Delta_{235} + \Delta_{215} \cdot \Delta_{234} = 0$

3) $\Delta_{321} \cdot \Delta_{345} - \Delta_{324} \cdot \Delta_{315} + \Delta_{325} \cdot \Delta_{314} = 0$

4) $\Delta_{423} \cdot \Delta_{415} - \Delta_{421} \cdot \Delta_{435} + \Delta_{425} \cdot \Delta_{431} = 0$

5) $\Delta_{523} \cdot \Delta_{541} - \Delta_{524} \cdot \Delta_{531} + \Delta_{521} \cdot \Delta_{534} = 0$

Drei von diesen Relationen sind unabhängig. Was den Beweis dieser Relationen anlangt, sei auf Nr.12 dieses § 2 verwiesen.

Man ersetzt nun mit Hilfe von 2) und 3)

Δ_{245} durch $\dfrac{\Delta_{214} \cdot \Delta_{235} - \Delta_{215}\ \Delta_{234}}{\Delta_{213}}$ und

Δ_{345} durch $\dfrac{\Delta_{324} \cdot \Delta_{315} - \Delta_{325} \cdot \Delta_{314}}{\Delta_{321}}$ und erhält

darnach:

$$V_3(P^{(5)},P'',P''',P^{(4)},P') = \frac{\Delta_{123}}{\Delta_{423}} : \frac{\Delta_{315}\cdot\Delta_{321}}{\Delta_{324}\cdot\Delta_{315}-\Delta_{325}\cdot\Delta_{314}} :$$

$$\frac{\Delta_{215}\cdot\Delta_{213}}{\Delta_{214}\cdot\Delta_{235}-\Delta_{215}\cdot\Delta_{234}} = 1 : \frac{1}{1-\frac{\Delta_{325}}{\Delta_{324}}\cdot\frac{\Delta_{314}}{\Delta_{315}}} : \frac{1}{1-\frac{\Delta_{214}}{\Delta_{215}}\cdot\frac{\Delta_{235}}{\Delta_{234}}}$$

$$= 1 : \frac{1}{1-\frac{y_1}{y_2}} : \frac{1}{1-\frac{y_1}{y_3}} = 1 : \frac{y_2}{y_2-y_1} : \frac{y_3}{y_3-y_1}$$

womit der analytische Ausdruck für die Transformation U gefunden ist.

11) Jetzt ist noch die Frage offen, ob der Isomorphismus zwischen der Permutationsgruppe von 5 Elementen und der Transformationsgruppe mehr- oder einstufig ist, mit anderen Worten, ob unter den Elementen von $\mathcal{G}^{(2)}$ gleiche vorkommen oder nicht. Wir werden sehen, dass letzteres der Fall, dass also der Isomorphismus einstufig ist.

In der Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(2)}$ von $\mathcal{G}^{(2)}$ sind, wie man sich an den in Nr.9 aufgeschriebenen Elementen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ überzeugt, keine gleichen. Nun wäre noch möglich, dass zwei von den Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ einander gleich sind oder - was dasselbe bedeutet - dass es unter den Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ eine gibt, welche mit $\mathcal{G}_1^{(2)}$ zusammenfällt. Dass müsste die Transformation, durch welche wie diese Nebengruppe gewonnen haben, gleich sein einer Transformation aus $\mathcal{G}_1^{(2)}$, also in analytischer Darstellung eine Permutation des Verhältnisses $y_1 : y_2 : y_3$ oder des Verhältnisses $\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3}$ sein. Man überzeugt sich leicht durch Aufstellung des analytischen Ausdruckes der in Frage kommenden Transformationen, und das kann man jetzt, weil alle verwendeten Transformationen R, S, T, U in ihrer analytischen Form bekannt sind, dass diese Annahme nicht zutrifft (in Kap.II, § 7 Nr.24, 25 sind diese in Frage stehenden Transformationen auch wirklich

herausgestellt). Aus diesem Grunde sind die Transformationen von $\mathcal{G}^{(2)}$ auch wirklich alle voneinander verschieden. Der Isomorphismus zwischen Permutations- und Transformationsgruppe ist also e i n s t u f i g .

12) Die in Nr.10 angegebenen Relationen zwischen den $\Delta_{\lambda\mu\nu}$ sind der Spezialfall für $n = 2$ von Beziehungen, die in etwas anderem Zusammenhang, nämlich bei den Betrachtungen der mehrdimensionalen Geometrie, auch für allgemeines n vorkommen. Da diese Relationen dort ausgearbeitet vorliegen, wollen wir uns darauf beschränken, kurz anzuführen, wie sie dort auftreten, und wollen zeigen, in welcher Weise die bei unseren Betrachtungen verwendeten Relationen mit ihnen in Zusammenhang stehen.

In einem Raum R^n seien $(n-1)$ unabhängige Punkte P', P'' .... $P^{(n-1)}$ durch ihre homogenen Koordinaten (x'), (x'') .... $(x^{(n-1)})$ gegeben und diese bestimmen wegen ihrer Unabhängigkeit einen R^{n-2} im R^n. Die Unabhängigkeit der Punkte findet ihren analytischen Ausdruck darin, dass der Rang der Matrix $(\mathfrak{M})$, welche die $(n+1)$ homogenen Koordinaten der $(n-1)$ Punkte P', P'' ..... P^{n-1} enthält, $n-1$ ist.

$$\left\| \begin{array}{cccc} x'_1 & x''_1 & \cdots\cdots & x_1^{(n-1)} \\ x'_2 & x''_2 & \cdots\cdots & x_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x'_{n+1} & x''_{n+1} & & x_{n+1}^{(n-1)} \end{array} \right\| \qquad (\mathfrak{M})$$

Als Koordinaten des R^{n-2} im R^n wählt man alle möglichen $(n-1)$-reihigen Determinanten aus $(\mathfrak{M})$, deren es $\binom{n+1}{2}$ gibt. Diese Determinanten sind aber nicht alle unabhängig voneinander willkürlich wählbar, da ja ein R^{n-2} nur von $2(n-1) + 1 = 2n-1$ Parametern abhängt, (siehe B e r t i n i , Einführung in die Geometrie mehrdimensionaler Räume, S.41), vielmehr besteht eine Anzahl $\binom{n+1}{4}$ Relationen von der Form:

$$\Delta_{1,2,\ldots\ n-3,n-2,n-1}\cdot\Delta_{1,2,\ldots\ n-3,n,n+1} -$$

$$-\Delta_{1,2,\ldots\ n-3,n-2,n}\cdot\Delta_{1,2,\ldots\ n-3,n-1,n+1} +$$

$$+\Delta_{1,2,\ldots\ n-3,n-2,n+1}\cdot\Delta_{1,2,\ldots\ n-3,n-1,n} = 0,$$

wobei unter $\Delta_{1,2,\ldots n-3,n-2,n-1}$ etwa diejenige Determinante zu verstehen ist, welche aus der Matrix $(\mathfrak{M})$ die Zeilen mit den Nummern $1,2,\ldots\ n-2,\ n-1$ enthält. (vgl. B e r t i n i , Einf.i.d.Geometrie mehrdim.Räume, S.43, Formel 14). Die übrigen $\binom{n+1}{4} - 1$ Relationen ergeben sich aus dieser angeschriebenen, wenn man immer andere $(n-3)$ aus den Zahlen $1,2,\ldots\ n,\ n+1$ an die ersten $(n-3)$ Stellen der Determinantenindizes setzt.

Es mag vielleicht noch interessant sein, zu erwähnen, dass diese $\binom{n+1}{4}$ Relationen auch nicht alle voneinander unabhängig sind, wie das schon aus der Tatsache einleuchtet, dass man $(2\ n-1)$ unabhängige Determinanten aus $(\mathfrak{M})$ hat und dass man mit Hilfe von $\binom{n-1}{2}$ geeigneten aus den $\binom{n+1}{4}$ Relationen die fehlenden $\binom{n+1}{2}-(2\ n-1) = \binom{n-1}{2}$ Determinanten finden kann (vgl. B e r t i n i , loc.cit. S.43). Es sind darnach alle Determinanten bekannt und keinen weiteren Bedingungen mehr unterworfen. Folglich sind die noch nicht verwendeten $\left[\binom{n+1}{4} - \binom{n-1}{2}\right]$ Relationen notwendigerweise von den übrigen abhängig.

Für den R^{n+2} lauten die Relationen entsprechend:

$$\Delta_{1,2,\ldots\ n-1,n,n+1}\cdot\Delta_{1,2,\ldots\ n-1,n+2,n+3} -$$

$$-\Delta_{1,2,\ldots\ n-1,n,n+2}\cdot\Delta_{1,1,\ldots\ n-1,n+1,n+3} +$$

$$+\Delta_{1,2,\ldots\ n-1,n,n+3}\cdot\Delta_{1,2,\ldots\ n-1,n+1,n+2} = 0$$

In dieser eben angegebenen Form verwenden wir für allgemeines n bei unseren Betrachtungen die Determinantenrelationen. Die vorkommenden Determinanten

- bei B e r t i n i aus einer Matrix von (n+1) Punkten mit je (n+3) Koordinaten - sind aber bei uns (n+1)-reihige Determinanten aus einer Matrix ($\mathfrak{M}'$), welche die (n+1) homogenen Koordinaten von (n+3) Punkten P', P'',P''' ..... $P^{(n+3)}$ enthält.

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_{n+1} \\ x''_1 & x''_2 & \cdots & x''_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{(n+3)}_1 & x^{(n+3)}_2 & \cdots & x^{(n+3)}_{n+1} \end{vmatrix} \qquad (\mathfrak{M}')$$

Diese abweichende Bedeutung ändert natürlich nichts an der Gültigkeit der Relationen.

§ 3. Aufstellung eines dem Doppelverhältnis der Geraden analogen Begriffes im Raum.

13) Die Punkte des Raumes seien festgelegt durch homogene Tetraederkoordinaten, so dass jedem Punkt P vier Zahlen (x_1,x_2,x_3,x_4) entsprechen, die der Einschränkung $(x_1,x_2,x_3,x_4) \neq (0,0,0,0)$ unterworfen sind.

Wir greifen 6 Punkte P',P'',P''',$P^{(4)}$,$P^{(5)}$,$P^{(6)}$ heraus und wollen unter dem vierfachen Verhältnis V_4 dieser 6 Punkte in der angegebenen Reihenfolge nachstehenden Ausdruck verstehen:

$$V_4(P',P'',P''',P^{(4)},P^{(5)},P^{(6)}) = y_1 : y_2 : y_3 : y_4 =$$

$$= (\Delta_{6234}\cdot\Delta_{1534}\cdot\Delta_{1254}\cdot\Delta_{1235}) : (\Delta_{5234}\cdot\Delta_{1634}\cdot\Delta_{1254}\cdot\Delta_{1235}) :$$

$$(\Delta_{5234}\cdot\Delta_{1534}\cdot\Delta_{1264}\cdot\Delta_{1235}) : (\Delta_{5234}\cdot\Delta_{1534}\cdot\Delta_{1254}\cdot\Delta_{1236})$$

Das Symbol $\Delta_{\lambda\mu\nu\varrho}$ ist dabei als Abkürzung für die aus den Koordinaten der 4 Punkte $P^{(\lambda)},P^{(\mu)},P^{(\nu)},P^{(\varrho)}$ gebildete vierreihige Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(\lambda)} & x_2^{(\lambda)} & x_3^{(\lambda)} & x_4^{(\lambda)} \\ x_1^{(\mu)} & x_2^{(\mu)} & x_3^{(\mu)} & x_4^{(\mu)} \\ x_1^{(\nu)} & x_2^{(\nu)} & x_3^{(\nu)} & x_4^{(\nu)} \\ x_1^{(\varrho)} & x_2^{(\varrho)} & x_3^{(\varrho)} & x_4^{(\varrho)} \end{vmatrix} = \Delta_{\lambda\mu\nu\varrho}$$

verwendet.

Das vierfache Verhältnis V_4 der 6 Punkte erscheint somit in der Gestalt des Verhältnisses von 4 Zahlen (y_1,y_2,y_3,y_4) und diese 4 Zahlen (y_1,y_2,y_3,y_4) sind bei Festhaltung der Punkte $P',P'',P''',P^{(4)},P^{(5)}$ eindeutig durch die Wahl des Punktes $P^{(6)}$ festgelegt. Setzt man dazu noch voraus, dass von den 5 festgehaltenen Punkten keine 4 in einer Ebene liegen, so kann $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ nie den Wert $0:0:0:0$ annehmen und es entspricht auch umgekehrt jedem System von 4 Zahlen (y_1,y_2,y_3,y_4) eindeutig ein System $(x_1^{(6)},x_2^{(6)},x_3^{(6)},x_4^{(6)})$, denn das für die Auflösung nach den $(x^{(6)})$ maßgebliche Gleichungssystem ist in den $(x^{(6)})$ linear und hat die Determinante $|A_{ik}| = \Delta_{1234}^3$; $(i,k = 1,2,3,4)$, wobei unter A_{ik} die Minoren der Determinante Δ_{1234} zu verstehen sind. Δ_{1234} ist aber nach Voraussetzung von Null verschieden. Die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems steht somit fest.

Fällt insbesondere $P^{(6)}$ nacheinander mit P', P'', P''', $P^{(4)}$ oder $P^{(5)}$ zusammen, so erhält man für das vierfache Verhältnis V_4 nacheinander die Werte

$$1:0:0:0 \quad 0:1:0:0 \quad 0:0:1:0 \quad 0:0:0:1 \quad 1:1:1:1$$

Die y_1,y_2,y_3,y_4 sind also nichts anderes, als die projektiven Koordinaten des Punktes $P^{(6)}$, wenn P',P'', $P''',P^{(4)}$ als Grundpunkte und $P^{(5)}$ als Einheitspunkt gewählt werden.

Um die folgenden Betrachtungen einfacher zu gestalten, ist es zweckmäßig, den Ausdruck für das V_4 ein wenig umzuformen:

$$V_4(P', P'', P''', P^{(4)}, P^{(5)}, P^{(6)}) = y_1 : y_2 : y_3 : y_4 =$$
$$= \frac{\Delta 6234}{\Delta 5234} : \frac{\Delta 1634}{\Delta 1534} : \frac{\Delta 1264}{\Delta 1254} : \frac{\Delta 1236}{\Delta 1235}$$

Diese Umformung ist erlaubt, weil die im Nenner stehenden Determinanten alle von Null verschieden sind.

14) Der Wert des vierfachen Verhältnisses V_4 von 6 Punkten ist von der Anordnung dieser Punkte abhängig und die Gesamtheit der vierfachen Verhältnisse, die man, zugehörig zu den 6! = 720 möglichen Permutationen der Punkte erhält, bildet eine Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(3)}$, welche isomorph ist zur Gruppe der Permutationen dieser 6 Punkte.

Um die Gruppe $\mathcal{G}^{(3)}$ kennen zu lernen, ist es notwendig, ihre Elemente nach geeigneten Gesichtspunkten zu ordnen und vor allem durch die Größen y_1, y_2, y_3, y_4 der Einheitstransformation auszudrücken; die Durchführung dieses Vorhabens ist für die Permutationsgruppe ein Vorgang, der einem Aufbau derselben aus wenigen erzeugenden Elementen gleichkommt.

Die Untersuchung soll einsetzen bei gewissen einfachen Elementen der Gruppe $\mathcal{G}^{(3)}$, die entstehen, wenn man in der Punkteanordnung des V_4 nur die ersten 4 und die letzten 2 Punkte unter sich vertauscht. Auf diese Art erhält man, wie leicht einzusehen ist, eine Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(3)}$ von $\mathcal{G}^{(3)}$.

Aus dieser Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(3)}$ werden nun jene Transformationen ausgesondert, welche einer Vertauschung nur der ersten 4 Punkte in der Punkteanordnung des V_4 entsprechen, die also eine Untergruppe $\mathcal{G}_2^{(3)}$ von $\mathcal{G}_1^{(3)}$ bilden. Diese Transformationen entstehen, indem man die y_1, y_2, y_3, y_4 in derselben Weise vertauscht, wie die ersten 4 Punkte in der Punkteanordnung. Sie sollen in Zukunft durch die Angabe der Permutation der y

benannt und unterschieden werden. So ergibt z.B. $(P'', P^{(4)})$

$$V_4(P', P^{(4)}, P''', P'', P^{(5)}, P^{(6)}) = \frac{\Delta_{6432}}{\Delta_{5432}} : \frac{\Delta_{1632}}{\Delta_{1532}} : \frac{\Delta_{1462}}{\Delta_{1452}} : \frac{\Delta_{1436}}{\Delta_{1435}} \cong y_1 : y_4 : y_3 : y_2$$

Es wird also diese Transformation durch die Permutation $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1 & y_4 & y_3 & y_2 \end{pmatrix}$ oder einfacher durch die Transposition (y_2, y_4) angegeben.

Nimmt man nunmehr die Transformation T

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_4}, \qquad (T)$$

welche der Permutation $(P^{(5)}, P^{(6)})$ entspricht dazu, so hat man mit $\mathcal{G}_2^{(3)} + \mathcal{G}_2^{(3)} \cdot T$ alle Transformationen von $\mathcal{G}_1^{(3)}$ erfasst: $\mathcal{G}_1^{(3)} = \mathcal{G}_2^{(3)} + \mathcal{G}_2^{(3)} \cdot T$.

Jetzt wird die ganze Gruppe $\mathcal{G}^{(3)}$ nach Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(3)}$ zerlegt. Dazu müssen neue Transformationen aufgestellt werden, die nicht schon in $\mathcal{G}_1^{(3)}$ vorkommen und von denen keine zwei dieselbe Nebengruppe bestimmen. Da $\mathcal{G}_1^{(3)}$ für sich 48, die ganze Gruppe aber 6! = 720 Elemente enthält, so braucht man $\frac{720}{48} = 15$ solcher Transformationen, die man erhält, wenn man immer andere von den 6 Punkten an die ersten 4 Stllen der Punkteanordnung des V_4 setzt; denn auf diese Weise ergeben sich gerade $\binom{6}{2} = 15$ Transformationen.

Die Vertauschung von P' mit $P^{(6)}$ liefert eine erste solche Transformation (U):

$$V_4(P^{(6)}, P'', P''', P^{(4)}, P^{(5)}, P') = \frac{\Delta_{1234}}{\Delta_{5234}} : \frac{\Delta_{6134}}{\Delta_{6534}} : \frac{\Delta_{6214}}{\Delta_{6254}} : \frac{\Delta_{6231}}{\Delta_{6235}} \qquad (U)$$

Die Darstellung der Transformation U als Funktion der y_1, y_2, y_3, y_4 wird in der folgenden Nr.15 angegeben.

Unter Verwendung von U, T und der Transformationen aus $\mathfrak{H}_1^{(3)}$ ist es nunmehr möglich, alle Transformationen, welche neue Nebengruppen liefern, darzustellen:

$$V_4(P'P^{(6)}P'''P^{(4)}P^{(5)}P'') = (y_1,y_2).U.(y_1,y_2)$$

$$V_4(P'P''P^{(6)}P^{(4)}P^{(5)}P''') = (y_1,y_3).U.(y_1,y_3)$$

$$V_4(P'P''P'''P^{(6)}P^{(5)}P^{(4)}) = (y_1,y_4).U.(y_1,y_4)$$

$$V_4(P^{(5)}P''P'''P^{(4)}P'P^{(6)}) = TUT$$

$$V_4(P'P^{(5)}P'''P^{(4)}P''P^{(6)}) = (y_1,y_2)\cdot TUT\cdot(y_1,y_2)$$

$$V_4(P'P''P^{(5)}P^{(4)}P'''P^{(6)}) = (y_1,y_3)\cdot TUT\cdot(y_1,y_3)$$

$$V_4(P'P''P'''P^{(5)}P^{(4)}P^{(6)}) = (y_1,y_4).TUT.(y_1,y_4)$$

$$V_4(P^{(6)}P^{(5)}P^{(3)}P^{(4)}P''P') = U.(y_1,y_2).TUT.(y_1,y_2)$$

$$V_4(P^{(6)}P''P^{(5)}P^{(4)}P'''P') = U.(y_1,y_3).TUT.(y_1,y_3)$$

$$V_4(P^{(4)}P''P^{(3)}P^{(5)}P^{(4)}P') = U.(y_1,y_4).TUT.(y_1,y_4)$$

$$V_4(P'P^{(6)}P^{(5)}P^{(4)}P'''P'') = (y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$$

$$V_4(P'P^{(6)}P^{(3)}P^{5)}P^{(4)}P'') = (y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$$

$$V_4(P'P''P^{(6)}P^{5)}P^{(4)}P''') = (y_1,y_3)U(y_1,y_3)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$$

Mit Benützung diese Transformationen lässt sich $\mathfrak{H}^{(3)}$ nunmehr in folgender Weise nach rechtsseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{H}_1^{(3)}$ zerlegen:

$$\mathfrak{H}^{(3)} = \mathfrak{H}_1^{(3)} + \mathfrak{H}_1^{(3)}U + \mathfrak{H}_1^{(3)}(y_1,y_2)U(y_1,y_2) +$$
$$+ \mathfrak{H}_1^{(3)}(y_1,y_3)U(y_1,y_3) + \mathfrak{H}_1^{(3)}(y_1,y_4)U(y_1,y_4) + \mathfrak{H}_1^{(3)}TUT +$$
$$+ \mathfrak{H}_1^{(3)}(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2) + \mathfrak{H}_1^{(3)}(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3) +$$
$$+ \mathfrak{H}_1^{(3)}(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4) + \mathfrak{H}_1^{(3)}U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2) +$$

$$+ \mathfrak{J}_1^{(3)} U(y_1,y_3)\,TUT(y_1,y_3) + \mathfrak{J}_1^{(3)} U(y_1,y_4)\,TUT(y_1,y_4) +$$
$$+ \mathfrak{J}_1^{(3)} (y_1,y_2)\cdot U\cdot(y_1,y_2)\cdot(y_1,y_3)\cdot TUT\cdot(y_1,y_3) +$$
$$+ \mathfrak{J}_1^{(3)} (y_1,y_2)\cdot U\cdot(y_1,y_2)\cdot(y_1,y_4)\cdot TUT\cdot(y_1,y_4) +$$
$$+ \mathfrak{J}_1^{(3)} (y_1,y_3)\cdot U\cdot(y_1,y_3)\cdot(y_1,y_4)\cdot TUT\cdot(y_1,y_4)$$

Diese Aufteilung erfasst alle Elemente der isomorphen Permutationsgruppe, folglich ist auch $\mathfrak{J}^{(3)}$ vollständig ausgeschöpft.

15) Die nächste Aufgabe wird es sein, die Transformation U durch die Größen y_1,y_2,y_3,y_4 auszudrücken. Man benützt hierzu die Nr.12 des § 2 gegebenen Determinantenrelationen für den Fall $n = 3$ und ersetzt gemäß dieser Relationen, nachfolgende Determinanten durch die ihnen gleichwertigen Ausdrücke schon bekannter Determinanten:

$$\Delta_{3456} = \frac{\Delta_{3415}\,\Delta_{3426} - \Delta_{3416}\,\Delta_{3425}}{\Delta_{3412}}$$

$$\Delta_{2456} = \frac{\Delta_{2435}\,\Delta_{2416} - \Delta_{2436}\,\Delta_{2415}}{2431}$$

$$\Delta_{2356} = \frac{\Delta_{2315}\,\Delta_{2346} - \Delta_{2316}\,\Delta_{2345}}{\Delta_{2314}}$$

Die Transformation U lässt sich damit umformen in:

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \frac{\Delta_{1234}}{\Delta_{5234}} : \frac{\Delta_{6134}}{\Delta_{6534}} : \frac{\Delta_{6214}}{\Delta_{6254}} : \frac{\Delta_{6231}}{\Delta_{6235}} =$$

$$= \frac{\Delta_{1234}}{\Delta_{5234}} : \frac{\Delta_{3416}}{\Delta_{3456}} : \frac{\Delta_{2416}}{\Delta_{2456}} : \frac{\Delta_{2316}}{\Delta_{2356}} = \frac{\Delta_{1234}}{\Delta_{5234}} :$$

$$: \frac{\Delta_{3416}\quad\Delta_{1234}}{\Delta_{3415}\,\Delta_{3426} - \Delta_{3416}\,\Delta_{3425}} : \frac{\Delta_{2416}\;\Delta_{1234}}{\Delta_{2435}\,\Delta_{2416} - \Delta_{2436}\,\Delta_{2415}} :$$

$$: \frac{\Delta_{2316}\quad\Delta_{1234}}{\Delta_{2315}\,\Delta_{2346} - \Delta_{2316}\,\Delta_{2345}} = \frac{1}{\Delta_{5234}} : \frac{1}{\frac{\Delta_{3426}}{y_2} - \Delta_{3425}} :$$

$$: \frac{1}{\Delta_{2435} - \frac{\Delta_{2436}}{y_3}} \quad \frac{1}{\frac{\Delta_{2346}}{y_4} - \Delta_{2345}} = 1 : \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_2}} :$$

$$: \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_3}} : \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_4}} = 1 : \frac{y_2}{y_2 - y_1} : \frac{y_3}{y_3 - y_1} : \frac{y_4}{y_4 - y_1} \quad (U)$$

Damit können jetzt alle Transformationen von $\mathfrak{G}^{(3)}$ als Funktionen von y_1, y_2, y_3, y_4 dargestellt werden

16) Wir wenden uns nun der Frage zu, ob der Isomorphismus zwischen der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(3)}$ und der Permutationsgruppe der 6 Punkte ein- oder mehrstufig ist und werden sehen, dass er auch hier - wie im Falle $n = 2$ - sich als einstufig herausstellt. Wenn er mehrstufig wäre, müsste $\mathfrak{G}^{(3)}$ einander gleiche Elemente enthalten. Bei $\mathfrak{G}_1^{(3)}$ ist das - wie man aus der Bauart seiner Transformationen erkennt - sicherlich nicht der Fall. Es ist also nur noch zu prüfen, ob von den Nebengruppen von $\mathfrak{G}_1^{(3)}$ keine mit $\mathfrak{G}_1^{(3)}$ zusammenfällt. Das würde dann eintreten, wenn die Transformation, durch welche wir die jeweilige Nebengruppe erhielten, schon in $\mathfrak{G}_1^{(3)}$ enthalten ist. Sie müsste also in ihrer analytischen Darstellung eine Permutation des Verhältnisses $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ oder des anderen $\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_4}$ sein. In § 8 Nr. 32, 33 und 34 sind die in Frage stehenden Transformationen explizit dargestellt und daran sieht man leicht, dass dieser Fall nicht eintritt. Isomorphismus zwischen den beiden Gruppen ist demgemäß e i n s t u f i g .

§ 4. Andeutung, wie sich im n-dimensionalen Raum die analogen Begriffe formulieren lassen.

17) Gegeben sind (n+3) Punkte $P', P'' \ldots P^{(n+2)}, P^{(n+3)}$ durch homogene Koordinaten: $P^{(\nu)}$ durch $(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)} \ldots x_{n+1}^{(\nu)})$. Die (n+1) Zahlen $x^{(\nu)}$ sind der Einschränkung unterworfen, dass nicht alle von ihnen zu gleicher Zeit Null werden dürfen.

Analog zu früher (§§ 2, 3) setzt man als (n+1)-faches Verhältnis V_{n+1} dieser (n+3) Punkte in den angegebenen Reihenfolge den folgenden Ausdruck an:

$$V_{n+1}(P'P'' \ldots P^{(n+1)}P^{(n+2)}P^{(n+3)}) = y_1 : y_2 \cdots : y_{n+1} =$$

$$= (\Delta_{n+3,2,3\ldots n,n+1} \cdot \Delta_{1,n+2,3\ldots n,n+1} \cdots \Delta_{1,2,3\ldots n,n+2}) :$$

$$: (\Delta_{n+2,2,3\ldots n,n+1} \cdot \Delta_{1,n+3,3\ldots n,n+1} \cdots \Delta_{1,2,3\ldots n,n+2}) :$$

$$\ldots : (\Delta_{n+2,2,3\ldots n,n+1} \Delta_{1,n+2,3\ldots n,n+1} \cdots \Delta_{1,2,3\ldots n,n+2})$$

wobei z.B. unter $\Delta_{n+3,2,3 \ldots n,n+1}$ diejenige (n+1)-reihige Determinante zu verstehen ist, welche die homogenen Koordinaten der Punkte $P^{(n+3)}$, $P'' \ldots P^{(n+1)}$ enthält.

Der Wert des V_{n+1} ist abhängig von der Anordnung der Punkte und alle möglichen Werte des V_{n+1}, die man erhält bei allen möglichen Vertauschungen der Punkte in der Punkteanordnung ergeben eine Transformationsgruppe $\mathfrak{G}^{(n)}$, welche isomorph ist zur Gruppe der Permutationen der (n+3) Punkte.

Hält man die (n+2) Punkte $P', P'', P''' \ldots P^{(n+2)}$ fest, so werden die y-Werte des V_{n+1} durch die Wahl des letzten Punktes $P^{(n+3)}$ festgelegt. Fallen weiter von den festgehaltenen (n+2) Punkten keine (n+1) in eine Hyperebene des R^n, so kann V_{n+1} bei veränderlichem $P^{(n+3)}$ nie den Wert 0:0 ..... :0 annehmen und das Entsprechen der x-

Werte des Punktes $P^{(n+3)}$ zu seinen y-Werten ist ein umkehrbar eindeutiges, weil die für die Auflösung der $x^{(n+3)}$-Werte nach den y-Werten maßgebliche Determinante, bestehend aus den Adjunkten von $\Delta_{1,2,\dots\, n+1}$ den Wert $(\Delta_{1,2,3\ \dots\ n,n+1})^n$ hat und der ist nach der eben gemachten Voraussetzung von Null verschieden.

Die Voraussetzung, dass von den festgehaltenen (n+2) Punkten keine (n+1) in eine Hyperebene des R^n fallen dürfen, erlaubt uns eine Umformung des V_{n+1} in:

$$V_{n+1}(P'P''\ \dots\ P^{(n+3)}) = \frac{\Delta_{n+3,2,3,\dots n,n+1}}{\Delta_{n+2,2,3,\dots n,n+1}} :$$

$$: \frac{\Delta_{1,n+3,3,\dots\, n,n+1}}{\Delta_{1,n+2,3,\dots\, n,n+1}} : \dots : \frac{\Delta_{1,2,\dots n,n+3}}{\Delta_{1,2,\dots n,n+2}}$$

Diese Form des V_{n+1} lässt seine Änderungen bei Permutation der Punkte leichter erkennen.

18) Eine Untersuchung der Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ läuft auch hier darauf hinaus, zunächst einfachere Elemente von $\mathcal{G}^{(n)}$ zu finden und von da schrittweise die Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ aus Nebengruppen einer Untergruppe aufzubauen.

Die einfachsten Elemente von $\mathcal{G}^{(n)}$ erhält man, wenn man nur die ersten (n+1) Punkte unter sich vertauscht. Es entspricht einer Permutation in der Anordnung der Punkte dieselbe Permutation der $y_1, y_2 \dots y_{n+1}$ und diese dabei entstehenden Transformationen bilden zusammen eine Untergruppe $\mathcal{G}_2^{(n)}$ von $\mathcal{G}^{(n)}$.

Weiter ergibt eine Vertauschung von $P^{(n+2)}$ mit $P^{(n+3)}$ das V_{n+1}

$$Y_1 : Y_2 : \dots : Y_{n+1} = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \dots : \frac{1}{y_{n+1}}$$ (Transformation T)

Durch Hinzunahme der Nebengruppe $\mathcal{G}_2^{(n)}T$ zu $\mathcal{G}_2^{(n)}$ erhält man eine neue Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(n)} = \mathcal{G}_2^{(n)} + \mathcal{G}_2^{(n)} \cdot T$ von

$\mathfrak{H}^{(n)}$ in Analogie zu den Untergruppen $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(3)}$ der §§ 2 und 3.

Die ganze Gruppe $\mathfrak{H}^{(n)}$ zerlegt man nun nach rechtsseitigen Nebengruppen von $\mathfrak{H}_1^{(n)}$. Die neuen Transformationen, die man hierzu benötigt, erhält man

a) durch aufeinanderfolgende Vertauschung von $P^{(n+3)}$ mit allen Punkten P'P" .... $P^{(n+1)}$;

b) durch aufeinanderfolgende Vertauschung von $P^{(n+2)}$ mit den Punkten P'P" .... $P^{(n+1)}$

c) durch alle möglichen Vertauschungen von $P^{(n+2)}$ und $P^{(n+3)}$ mit je zweien aus der Punktmenge P'P"..... $P^{(n+1)}$.

Unter Verwendung dieser Transformationen - es sind unter a) $(n+1)$, unter b) $(n+1)$, unter c) $\binom{n+1}{2}$, zusammen also $\left[\binom{n+3}{2} - 1\right]$ - kann man $\left(\binom{n+3}{2} - 1\right)$ Nebengruppen von $\mathfrak{H}_1^{(n)}$ aufstellen, die mit $\mathfrak{H}_1^{(n)}$ zusammen $2(n+1)! \cdot \binom{n+3}{2} =$ $= (n+3)!$ Elemente, soviel also, wie $\mathfrak{H}^{(n)}$ haben muss, enthalten. Von den zugehörigen isomorphen Permutationsunter- und -nebengruppen sind keine 2 gleich, folglich sind also durch diese Aufteilung alle Elemente von $\mathfrak{H}^{(n)}$ erfasst.

19). Es ist notwendig für e i n e solche neue Transformation die analytische Darstellung zu kennen; die übrigen lassen sich dann durch sie und die Transformationen von $\mathfrak{H}_1^{(n)}$ ja alle ausdrücken. Mit Benützung der Determinantenrelationen der Nr.12 des § 2 findet man für das V_{n+1}, welches eine Vertauschung von P' mit $P^{(n+3)}$ entspricht:

$$Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1} = 1 : \frac{y_2}{y_2 - y_1} : \frac{y_3}{y_3 - y_1} : \ldots : \frac{y_{n+1}}{y_{n+1} - y_1} \qquad (U)$$

Allgemein entsteht bei Vertauschung von $P^{(\nu)}$ mit $P^{(n+3)}$:

$$Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1} = \frac{y_1}{y_1 - y_\nu} : \frac{y_2}{y_2 - y_\nu} : \ldots :$$

$$: \frac{y_{\nu-1}}{y_{\nu-1} - y_\nu} : 1 : \frac{y_{\nu+1}}{y_{\nu+1} - y_\nu} : \ldots : \frac{y_{n+1}}{y_{n+1} - y_\nu}$$

Die Vertauschung von P' mit $P^{(n+2)}$ liefert die Transformation:

$$Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1} = y_1 : (y_1 - y_2) : (y_1 - y_3) : \ldots : (y_1 - y_{n+1})$$

Und allgemein entsteht bei Vertauschung von $P^{(\nu)}$ mit $P^{(n+2)}$

$$Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1} = (y_\nu - y_1) : \ldots : (y_\nu - y_{\nu-1}) :$$

$$: y_\nu : (y_\nu - y_{\nu+1}) : \ldots : (y_\nu - y_{n+1})$$

Die Vertauschung von P' mit $P^{(n+3)}$ und von P" mit $P^{(n+2)}$ ergibt die Transformation:

$$Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1} = 1 : \frac{y_2}{y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} : \ldots\ldots : \frac{y_{n+1} - y_2}{y_{n+1} - y_1}$$

Allgemein entsteht bei der Permutation $(P^{(\mu)}, P^{(n+3)}) \cdot (P^{(\nu)}, P^{(n+2)})$ $(\mu < \nu)$

$$Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1} = \frac{y_1 - y_\nu}{y_1 - y_\mu} : \frac{y_2 - y_\nu}{y_2 - y_\mu} : \ldots : \frac{y_{\mu-1} - y_\nu}{y_{\mu-1} - y_\mu} : 1 :$$

$$: \frac{y_{\mu+1} - y_\nu}{y_{\mu+1} - y_\mu} : \ldots : \frac{y_{\nu-1} - y_\nu}{y_{\nu-1} - y_\mu} : \frac{y_\nu}{y_\mu} : \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\mu} : \ldots : \frac{y_{n+1} - y_\nu}{y_{n+1} - y_\mu}$$

20) Die Frage nach der Art des Isomorphismus der Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ und der Permutationsgruppe der (n+3)Punkte ist nach den jetzt bekannten Tatsachen leicht zu beantworten: Der Isomorphismus ist einstufig. In $\mathcal{G}_1^{(n)}$ sind sicherlich keine gleichen Elemente. Die $\binom{n+3}{2} - 1$ Transformationen, mit deren Hilfe man die Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(n)}$ aufgestellt hat, sind - wie man sich an Hand ihrer in Nr.19 angegebenen analytischen Gestalt überzeugt, -auch nicht gleich einer Transformation aus $\mathcal{G}_1^{(n)}$. Unter den Elementen von $\mathcal{G}^{(n)}$ können also keine gleichen sein, der Isomorphismus zwischen Transformations- und Permutationsgruppe ist deshalb e i n s t u f i g .

II. Kapitel.

§ 5. Betrachtung der Transformationsgruppen $\mathcal{G}^{(n)}$ und Aufstellung zugehöriger Fundamentalbereiche.

21) Wir haben aus den Ausführungen des I. Kapitels gesehen, dass sich für jede Dimension eine endliche Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(n)}$ für die (n+1)-fachen Verhältnisse aufstellen lässt. Die n+1 Zahlenwerte Y_1, Y_2, ... Y_{n+1}, wollen wir nun als homogene Koordinaten eines Punktes P in n-dimensionalen Raum deuten. Die (n+3)! Transformationen von $\mathcal{G}^{(n)}$ führen nun diesen Punkt P in (n+3)! im allgemeinen verschiedene Punkte über. Man kann diesen einen Punkt P als den Repräsentanten von (n+3)! Punkten auffassen, die man eben vermittels der Transformationen aus ihm erhält. Wenn man nunmehr unter diesem Gesichtspunkt alle Punkte des R^n vornimmt, von je (n+3)! zusammengehörigen Punkten also immer nur einen als Repräsentanten der übrigen auswählt, so erhält man eine Punktmenge $\mathfrak{M}_1$ mit folgender Eigenschaft: Transformiert man $\mathfrak{M}_1$ mittels aller (n+3)! Transformationen, so ergeben sich (n+3)! Punktmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_{(n+3)!}$, die zusammen den n-dimensionalen Raum einfach und lückenlos überdecken. Bilden die Punkte der Menge $\mathfrak{M}_1$ überdies einen offenen oder abgeschlossenen Bereich, so bezeichnen wir diese Menge als einen offenen oder abgeschlossenen Fundamentalbereich der Gruppe $\mathcal{G}^{(n)}$. Die Frage, die wir bei der weiteren Untersuchung stellen, ist die nach einem möglichst einfachen Fundamentalbereich. Die Untersuchung wird dabei nur für reelle Werte der Veränderlichen geführt.

Wir schicken in § 6 die Darstellung der bekannten Verhältnisse beim linearen Fall voraus.

§ 6. Die Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(1)}$. Fundamentalbereiche.

22) Die Elemente der Gruppe $\mathcal{G}^{(1)}$ sind (Nr.7, § 1):

1) $Y_1 : Y_2 = y_1 : y_2$ 2) $Y_1 : Y_2 = y_2 : y_1$

3) $Y_1 : Y_2 = y_1 : (y_1 - y_2)$ 4) $Y_1 : Y_2 = y_2 : (y_2 - y_1)$

5) $Y_1 : Y_2 = (y_1 - y_2) : y_1$ 6) $Y_1 : Y_2 = (y_2 - y_1) : y_2$

Die Zahlenpaare Y_1, Y_2 seien projektive reelle Koordinaten der Punkte einer Geraden g, auf der die Grundpunkte $Q'(0:1)$, $Q''(1:0)$ und der Einheitspunkt $Q'''(1:1)$ bekannt sein sollen.

Der Bereich $0 < y_1 < \frac{y_2}{2}$ stellt einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\mathcal{G}^{(1)}$ dar. Er wird durch die Transformationen von $\mathcal{G}^{(1)}$ in 6 Bereiche übergeführt, die zusammen bis auf ihre Randpunkte die Gerade g erfüllen. Die Randpunkte selbst sind nicht in die Bereiche mit einbezogen, da sie bei gewissen Transformationen auf sich selbst abgebildet werden (siehe Figur 1).

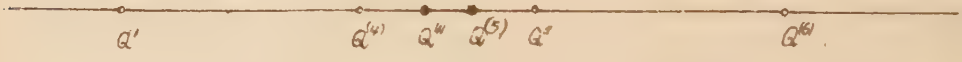


Fig. 1.

Der Bereich $0 < y_1 < \frac{y_2}{2}$ wird wie folgt transformiert. Bei der Transformation

1) $Y_1 : Y_2 = y_1 : y_2$	bleibt er erhalten		
2) $Y_1 : Y_2 = y_2 : y_1$	geht er in	$Y_1 > 2\,Y_2 > 0$	über
3) $Y_1 : Y_2 = y_1 : (y_1 - y_2)$	" " "	$0 < Y_1 < -\,Y_2$	"
4) $Y_1 : Y_2 = y_2 : (y_2 - y_1)$	" " "	$Y_2 < Y_1 < 2\,Y_2$	"
5) $Y_1 : Y_2 = (y_1 - y_2) : y_1$	" " "	$0 < Y_2 < -\,Y_1$	"
6) $Y_1 : Y_2 = (y_2 - y_1) : y_2$	" " "	$Y_1 < Y_2 < 2\,Y_1$	"

Das sind in der angegebenen Reihenfolge die Strecken:
$Q'Q^{(4)}$, $Q''Q^{(5)}$, $Q'Q^{(6)}$, $Q'''Q^{(5)}$, $Q''Q^{(6)}$, $Q'''Q^{(4)}$
(Fig.1)

§ 7. Untersuchung der Gruppe $\mathcal{G}^{(2)}$ im zweidimensionalen Fall.

23) Die Elemente der Gruppe $\mathcal{G}^{(2)}$ sind alle, sowohl in ihrer Darstellung durch Zusammensetzung aus den Transformationen R, S, T, U, sowie auch als Funktionen der Größen y_1, y_2, y_3 bekannt. $\mathcal{G}^{(2)}$ setzt sich zusammen aus der Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(2)}$ und 9 rechtsseitigen Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ (§ 2).

Unter dem dreifachen Verhältnis $y_1:y_2:y_3$ seien nun die homogenen Dreieckskoordinaten eines Punktes P in einer Ebene, für welche diese Koordinaten eingeführt sind, verstanden. Die Zuordnung der Koordinaten zu den Punkten ist also bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig.

Das Koordinatendreieck habe die Eckpunkte Q_1, Q_2, Q_3. Punkt Q_4 soll der Einheitspunkt bei dieser Koordinatenbestimmung sein. Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 werden nun durch drei Gerade mit dem Punkt Q_4 verbunden und diese Geraden schneiden auf den Gegenseiten von Q_1, Q_2, Q_3 bezüglich die Punkte H_1, H_2, H_3 aus (Figur 2).

24) Wir wollen jetzt untersuchen, was bei den Transformationen von $\mathcal{G}^{(2)}$ mit gewissen Bereichen der Ebene geschieht.

Satz 1. Der Bereich $0 < y_2 < y_1 < y_3$ (F_1) - es ist das Innere des Dreiecks $Q_3Q_4H_2$- wird durch die 12 Transformationen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ nur auf die 6 Teildreiecke

$$Q_4Q_1H_3,\ Q_4Q_2H_3,\ Q_4Q_2H_1,\ Q_4Q_3H_1,\ Q_4Q_3H_2,\ Q_4Q_1H_2 \qquad (A)$$

abgebildet und zwar so, dass jedes solche Teildreieck genau bei zwei Transformationen mit den Bildpunkten des

Bereiches F_1 einmal lückenlos überdeckt wird. (Die Wahl des Bereiches F_1 in der angegebenen Form erweis sich, wenn später F_1 einer genaueren Betrachtung unterworfen wird (siehe Nr.23) als nützlich, da man bei zeichnerischer Darstellung häufig die Gerade $y_3 = 0$ als uneigentliche Gerade wählt.)

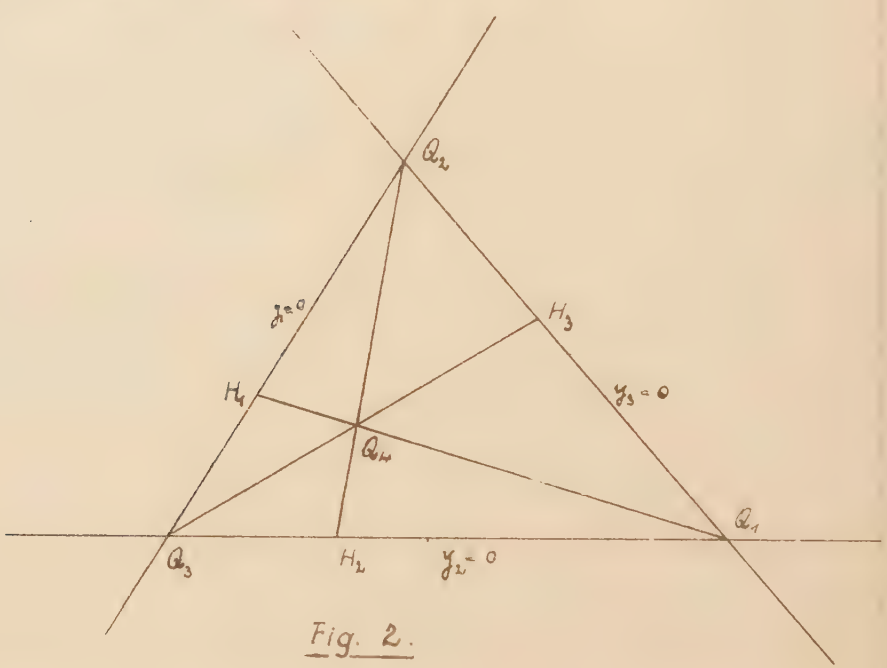


Fig. 2.

Beweis:

1) Die Transformation R ($Y_1:Y_2:Y_3 = y_2:y_1:y_3$) führt F_1, das ist das Innere des Dreiecks $Q_3Q_4H_2$ über in $0 < Y_1 < Y_2 < Y_3$, wodurch das ganze Innere von Dreieck $Q_4Q_3H_1$ festgelegt ist. Die Transformation ist umkehrbar eindeutig, deshalb ist die Abbildung lückenlos.

Genau so ist es mit den Transformationen S, SR, RS und RSR, die F_1 nacheinander in die Dreiecke

$Q_4Q_1H_2$, $Q_4Q_1H_3$, $Q_4Q_2H_1$ und $Q_4Q_2H_3$ überführen. Der einfache Bau dieser Transformationen - sie bestehen aus einer Umstellung der y_1, y_2, y_3 - lässt dies sofort erkennen.

Mit diesen Transformationen ist die Untergruppe $\mathcal{G}_2^{(2)}$ von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ behandelt. Es muss nun noch die Nebengruppe $\mathcal{G}_2^{(2)} \cdot T$ (§ 2 Nr.9) untersucht werden.

2) Durch die Transformation T $\left(Y_1 : Y_2 : Y_3 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3}\right)$ wird F_1 abgebildet auf den Bereich

$$0 < \frac{1}{Y_2} < \frac{1}{Y_1} < \frac{1}{Y_3} \quad \text{d.i.} \quad 0 < Y_3 < Y_1 < Y_2$$

oder das Innere des Dreiecks $Q_4Q_3H_2$. Die Transformation T ist umkehrbar eindeutig und ausserdem involutorisch, die Abbildung von F_1 erfüllt also sicher das ganze Innere von Dreieck $Q_4Q_2H_3$ lückenlos mit Bildpunkten.

Für die übrigen Transformationen der Nebengruppe $\mathcal{G}_2^{(2)} \cdot T$ ist eine Untersuchung nicht mehr nötig, denn nach Nr.1 dieses Beweises wissen wir, dass die Transformationen der Untergruppe $\mathcal{G}_2^{(2)}$ jedes Dreieck aus (A) in alle 6 Dreiecke aus (A) je zweimal überführen. T aber führt F_1 in $Q_4Q_2H_3$ über und das ist eben ein Dreieck aus (A). $\mathcal{G}_2^{(2)} \cdot T$ lässt deshalb alle 6 Dreiecke (A) je einmal das Abbild von F_1 werden.

Insbesondere bilden die Transformationen E und RSRT das Dreieck F_1 auf sich ab.

25) Für die Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(2)}$ suchen wir zunächst die Bildbereiche von F_1 für jene Transformationen, mittels welcher wir die jeweils in Frage stehende Nebengruppe erhalten haben.

Satz 2. Die Transformationen RUR, STUST, RTURTU und STUSTU bilden F_1 auf je eines aus den 6 Dreiecken (A) lückenlos ab.

Aus diesem Satze folgt sofort, dass die Transformationen der Nebengruppen $\mathcal{G}_1^{(2)}$ ·RUR, $\mathcal{G}_1^{(2)}$·STUST, $\mathcal{G}_1^{(2)}$RTURTU und $\mathcal{G}_1^{(2)}$·STUSTU - innerhalb jeder Nebengruppe - den Bereich F_1, je zweimal lückenlos auf jedes Dreieck aus (A) abbilden (vgl. auch Satz 1.).

Beweis.

a) RUR hat die analytische Form

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_1}{y_1-y_2} : 1 : \frac{y_3}{y_3-y_2} = \frac{1}{1-\frac{y_2}{y_1}} : 1 : \frac{1}{1-\frac{y_2}{y_3}}$$

Da F_1 festgelegt ist durch die Bedingung $y_3 > y_1 > y_2 > 0$, so folgt daraus:

$1 > \frac{y_2}{y_1} > \frac{y_2}{y_3} > 0$ oder $0 < 1 - \frac{y_2}{y_1} < 1 - \frac{y_2}{y_3} < 1$ oder

$\frac{1}{1-\frac{y_2}{y_1}} > \frac{1}{1-\frac{y_2}{y_3}} > 1$; das bedeutet aber $0 < Y_2 < Y_3 < Y_1$

Durch diese Bedingung sind gerade die inneren Punkte von Dreieck $Q_4Q_1H_2$ festgelegt.

b) STUST hat die analytische Form

$$Y_1:Y_2:Y_3 = (y_3-y_1) : (y_3-y_2) : y_3$$

Da F_1 festgelegt ist durch die Bedingung $y_3 > y_1 > y_2 > 0$, so folgt daraus: $y_3 > (y_3-y_2) > (y_3-y_1) > 0$ oder $Y_3 > Y_2 > Y_1 > 0$. Diese Bedingung legt das Innere des Dreiecks $Q_4Q_3H_1$ fest.

c) RTURTU hat die analytische Form:

$$Y_1:Y_2:Y_3 = 1:\frac{y_2}{y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} = \frac{y_1}{y_2} : 1 : (\frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1})$$

Aus der Bedingung für F_1: $y_3 > y_1 > y_2 > 0$ folgt:

1) $\frac{y_1}{y_2} > 1$; 2) $(y_3-y_2) > (y_3-y_1)$ oder $\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} > 1$

1) und 2) zusammengefasst ergibt:

$$\frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{(y_3-y_2)}{(y_3-y_1)} > \frac{y_1}{y_2} > 1 \quad \text{oder} \quad Y_3 > Y_1 > Y_2 > 0 ,$$

wodurch F_1 selbst festgelegt ist.

d) STUSTU hat die analytische Form:

$$Y_1:Y_2:Y_3 = 1 : \frac{y_2-y_3}{y_2-y_1} : \frac{y_3}{y_1} = 1 : \frac{y_3}{y_1} \cdot \frac{1-\frac{y_2}{y_3}}{1-\frac{y_2}{y_1}} : \frac{y_3}{y_1}$$

Aus der Bedingung für F_1: $y_3 > y_1 > y_2 > 0$ folgt:

1) $\frac{y_2}{y_3} < \frac{y_2}{y_1} < 1$ oder $(1-\frac{y_2}{y_3}) > (1-\frac{y_2}{y_1}) > 0$ oder $\frac{1-\frac{y_2}{y_3}}{1-\frac{y_2}{y_1}} > 1$

2) $\frac{y_3}{y_1} > 1$

1) und 2) zusammengefasst ergibt $\frac{y_2-y_3}{y_2-y_1} > \frac{y_3}{y_1} > 1$ oder

$Y_2 > Y_3 > Y_1 > 0$, wodurch das Innere des Dreiecks $Q_4Q_2H_1$ festgelegt ist.

Nach Satz 1 und nach der Bemerkung im Anschluss an Satz 2 kennen wir damit die Bildbereiche von F_1 für die Transformationen der Untergruppe $\mathcal{G}_{11}^{(2)}$ und deren Nebengruppen $\mathcal{G}_1^{(2)}$·RUR, $\mathcal{G}_1^{(2)}$·STUST, $\mathcal{G}_1^{(2)}$·RTURTU und $\mathcal{G}_1^{(2)}$·STUSTU. Es sind jeweils nur Dreiecke aus

der Menge (A). Insbesondere wird F_1 durch folgende Transformationen auf sich selbst abgebildet.

E, RSRT, SRUR, SRTRUR, RSTUST, RST·STUST, RTU·RTU, RSRT·RTURTU, SRSTUSTU, ST·STUSTU

Diese 10 Transformationen bilden, weil sie F_1 auf sich selbst abbilden eine Untergruppe $\mathfrak{U}^{(2)}$ von $\mathfrak{G}^{(2)}$. Da wir sie später nochmals zu eingehender Betrachtung benötigen, sei hier gleich ihr analytischer Ausdruck angegeben:

$$Y_1:Y_2:Y_3 = y_1:y_2:y_3 \qquad \text{(E)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_2} \qquad \text{(RSRT)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_3}{y_3-y_2} : 1 : \frac{y_1}{y_1-y_2} \qquad \text{(SRUR)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_3-y_2}{y_3} : \frac{y_1-y_2}{y_1} : 1 \qquad \text{(SRTRUR)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_3-y_2}{y_3} : \frac{y_3-y_1}{y_3} : 1 \qquad \text{(RSTUSTU)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_3}{y_3-y_2} : 1 : \frac{y_3}{y_3-y_1} \qquad \text{(RSTSTUST)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = 1 : \frac{y_2}{y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} \qquad \text{(RTURTU)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = 1 : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} : \frac{y_1}{y_2} \qquad \text{(RSRTRTURTU)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_3}{y_1} : 1 : \frac{y_2-y_3}{y_2-y_1} \qquad \text{(SRSTUSTU)}$$

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_1}{y_3} : \frac{y_2-y_1}{y_2-y_3} : 1 \qquad \text{(STSTUSTU)}$$

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, dass alle die in Satz 2 genannten Transformationen F_1 lückenlos je auf eines der 6 Teildreiecke (A) abbilden. Dieser Beweis wird nachgeholt in Nr.27, wenn auch noch die Bildbereiche von F_1, die man bei den Transformationen der noch nicht betrachteten Nebengruppen von $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ erhält, bekannt sind. An die Aufsuchung dieser Bildbereiche wollen wir jetzt gehen.

Satz 3. Der Bereich F_1 wird durch die Transformationen

U, TUT, RTURT, SUS, STUST RUR

auf je eines der Dreiecke in der projektiven Ebene

$Q_1H_3Q_3$, $Q_1H_2Q_2$, $Q_2H_3Q_3$, $Q_2H_1Q_1$, $Q_3H_1Q_1$, $Q_3H_2Q_2$ (B)

abgebildet.

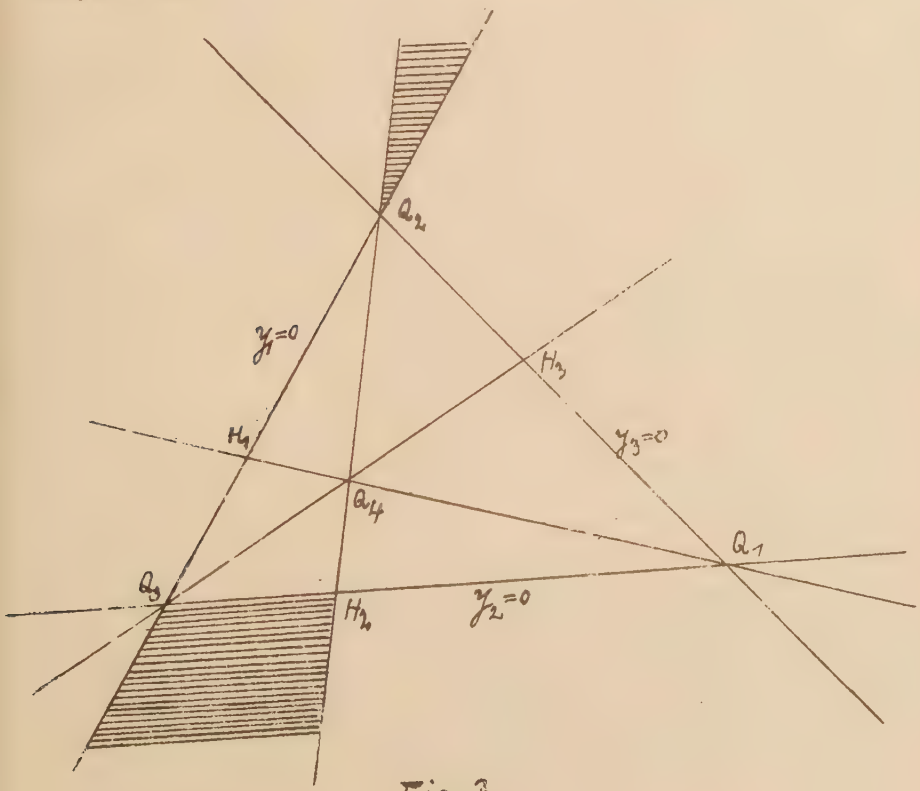


Fig. 3.

In Figur 3 werden diese 6 Dreiecke alle durch die uneigentliche Gerade zerlegt. Eines davon, $Q_3H_2Q_2$, ist durch Schraffierung hervorgehoben.

Beweis zu Satz 3.

Die Transformation U hat die analytische Form:

$$Y_1:Y_2:Y_3 = 1 : \frac{y_2}{y_2-y_1} : \frac{y_3}{y_3-y_1}$$

Aus der Bedingung für F_1: $y_3 > y_1 > y_2 > 0$ folgt:

1) $y_2-y_1 < 0$ oder $\frac{y_2}{y_2-y_1} < 0$ und aller negativer Werte fähig.

2) $y_3-y_1 < y_3$ oder $1 < \frac{y_3}{y_3-y_1}$

1) und 2) zusammengefasst ergibt $\frac{y_2}{y_2-y_1} < 0 < 1 < \frac{y_3}{y_3-y_1}$

oder $Y_2 < 0 < Y_1 < Y_3$, wodurch - wie man sich leicht mit Hilfe der Figur 3 überzeugt - das Dreieck $Q_3H_2Q_2$ aus (B) festgelegt ist.

In ganz analoger Weise verläuft die Untersuchung bei den übrigen Transformationen des Satzes 3. Hier das Ergebnis: $Y_1:Y_2:Y_3 = y_1 : (y_1 - y_2):(y_1- y_3)$ (TUT) bildet F_1 auf den Bereich $Y_3 < 0 < Y_2 < Y_1$ ab.(Dreieck $Q_1H_3Q_3$).

$Y_1:Y_2:Y_3 = (y_2-y_1) : y_2: (y_2-y_3)$ (RTURT) bildet F_1 auf den Bereich $Y_2 < 0 < Y_1 < Y_3$ ab (Dreieck $Q_3H_2Q_2$).

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_1}{y_1-y_3} : \frac{y_2}{y_2-y_3} : 1 \quad \text{(SUS)}$$

bildet F_1 auf den Bereich $Y_3 < 0 < Y_2 < Y_1$ ab (Dreieck $Q_1H_3Q_3$)

$$Y_1:Y_2:Y_3 = \frac{y_1-y_3}{y_1-y_2} : 1 : \frac{y_3}{y_2} \quad \text{(STUSTRUR)}$$

bildet F_1 auf den Bereich $Y_1 < 0 < Y_2 < Y_3$ ab (Dreieck $Q_3 H_1 Q_1$)

Als Bildbereiche kommen also bei diesen Transformationen nur solche vor, welche unter (B) aufgeführt sind.

Nunmehr lässt sich leicht feststellen, in welche Bereiche die Transformationen einer, zu den in Satz 3 aufgeschriebenen Transformationen gehörigen Nebengruppe von $\mathfrak{G}_1^{(2)}$ den Bereich F_1 überführen.

Die Transformation, zu der die Nebengruppe gehört, führt F_1 nach Satz 3 in einen der Bereiche aus (B) über. Dieser erhaltene Bereich wird nun den Transformationen von $\mathfrak{G}_1^{(2)}$ unterworfen. Dadurch wird er zweimal auf jeden der Bereiche aus (B) abgebildet, ein Ergebnis, das man leicht erhält, wenn man die Betrachtungen, die man über die Abbildung des Bereiches F_1 bei den Transformationen von $\mathfrak{G}_1^{(2)}$ angestellt hat, in ganz analoger Weise für die Abbildung der Bereiche aus (B) bei eben denselben Transformationen wiederholt. Die Betrachtungen gestalten sich einfach, weil die Transformationen von $\mathfrak{G}_1^{(2)}$ nur aus einer Permutation der y_1, y_2, y_3 oder deren reziproken Werte bestehen.

Damit nun sind uns die Bildbereiche von F_1 für alle Transformationen der 10 Nebengruppen von $\mathfrak{G}_1^{(2)}$ und somit für alle Transformationen aus $\mathfrak{G}^{(2)}$ bekannt.

27) Unschwer lässt sich jetzt nach diesen Vorarbeiten zeigen, dass bei irgendeiner Transformation aus $\mathfrak{G}^{(2)}$ der Bereich F_1 l ü c k e n l o s auf einen der Bereiche aus (A) oder (B) abgebildet wird.

Angenommen F_1 wird durch eine beliebige Transformation W aus $\mathfrak{G}^{(2)}$ nur auf einen Teil $W(F_1)$ eines Bereiches F_2 auf (A) oder (B) abgebildet. Wir wissen aber, dass es in $\mathfrak{G}^{(2)}$, weil $\mathfrak{G}^{(2)}$ eine Gruppe ist, eine in-

verse Transformation W^{-1} zu W gibt. Diese Transformation W^{-1} ist eindeutig, weil alle Transformationen aus $\mathcal{J}^{(2)}$, trotzdem sie nicht durchwegs linear sind, umkehrbar eindeutig sind (Cremona Transformationen). Vermöge der Gruppeneigenschaft von $\mathcal{J}^{(2)}$ gilt für den Bereich F_2 aus (A) oder (B), von dem $W(F_1)$ ein Teil sein soll, dasselbe wie für F_1. Er wird durch W^{-1} auf das ganze F_1 oder auf Teile davon abgebildet. Andererseits bildet W^{-1} als inverse Transformation von W aber schon den Teil $W(F_1)$ von F_2 auf das ganze F_1 ab. Diese beiden Tatbestände lassen sich nur vereinen, wenn $W(F_1)$ mit dem Bereich F_2 identisch ist.

Zusammenfassend stellen wir folgendes als das Ergebnis dieser Betrachtungen fest: Die Koordinatenebene ist zerlegt in 6 Bereiche (A), die das Innere des Koordinatendreiecks ausfüllen und in 6 Bereiche (B), die das Äussere dieses Dreiecks bedecken [1]. Nehmen wir einen aus diesen 12 Bereichen, etwa F_1 vor, so wird er durch die Transformationen $\mathcal{J}^{(2)}$ je 10-mal auf jeden der 12 Bereiche abgebildet. Insbesondere wird F_1 durch die im Anschluss an Satz 2) (Nr.25) zusammengestellten Transformationen der Untergruppe $\mathcal{U}^{(2)}$ auf sich selbst abgebildet.

28) Wir widmen unsere Aufmerksamkeit jetzt diesem Bereiche, der durch die Transformationen von $\mathcal{U}^{(2)}$ 10-mal auf sich selbst abgebildet.

Satz 4. Der Bereich

$$1)\ y_3 > y_1 > y_2 > 0 \qquad 2)\ y_1 + y_2 - y_3 < 0$$
$$3)\ y_1(y_2 - 2y_3) + y_3^2 < 0 \qquad (\mathfrak{L})$$

1) Von den 4 Gebieten, in welche die projektive Ebene durch die drei Geraden Q_1Q_2, Q_1Q_3, Q_2Q_3 zerlegt wird, heißt das den Einheitspunkt Q_4 enthaltende das Innere des Koordinatendreieckes, die anderen bilden das Äussere.

wird durch die Transformationen von $\mathfrak{U}^{(2)}$ auf 10 Bereiche abgebildet, die zusammen den Bereich F_1 lückenlos überdecken.

Aus diesem Satz folgt sofort, dass dieser Bereich einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\mathfrak{G}^{(2)}$ darstellt. Denn bezeichnen wir die Transformationen von $\mathfrak{U}^{(2)}$ mit $U_1 = E, U_2, U_3, \ldots U_{10}$, und den Bereich, in welchen $\mathfrak{L}$ durch U_ν übergeführt wird, mit $U_\nu(\mathfrak{L})$, so ist nach Satz 4. $\sum_{\nu=1}^{10} U_\nu(\mathfrak{L}) = F_1$; bedeutet weiter W irgendeine Transformation aus $\mathfrak{G}^{(2)}$, die F_1 in einen von F_1 verschiedenen Bereich F_2 aus (A) oder (B) überführt, so gilt

$$F_2 = W(F_1) = W\left(\sum_{\nu=1}^{10} U_\nu(\mathfrak{L})\right) = \sum_{\nu=1}^{10} WU_\nu(\mathfrak{L})$$

Die 10 Transformationen WU_ν sind gerade diejenigen aus $\mathfrak{G}^{(2)}$, welche F_1 in F_2 überführen (vergl.Nr.27). Nach den in Nr.27 gemachten Feststellungen leuchtet auch ohne weiteres ein, dass jeder beliebige Bereich F_2 aus (A) oder (B) bei 10 Transformationen von $\mathfrak{G}^{(2)}$ als Summe von 10 Bildbereichen des Bereiches $\mathfrak{L}$ erscheint. Das bedeutet aber, dass die ganze Ebene einmal mit Bildern von $\mathfrak{L}$ lückenlos überdeckt wird.

Beweis des Satzes 4.

Die Bedingung $y_3 > y_1 > y_2 > 0$ brauchen wir nicht in ihrer Abhängigkeit von den Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{U}^{(2)}$ untersuchen, weil der durch diese Bedingung gekennzeichnete Bereich F_1 bei den Transformationen aus $\mathfrak{U}^{(2)}$ in sich übergeht, die Bedingung also erhalten bleibt. Die Bedingungen 2) und 3) des Satzes 4 werden in der angegebenen Reihenfolge in die nachstehend bei jeder einzelnen Transformation $\mathfrak{U}^{(2)}$ angegebenen Ungleichungen übergeführt.

E	$y_1+y_2-y_3<0$	$y_1(y_2-2y_3)+y_3^2<0$
RSRT	$y_2y_2+y_1y_2-y_1y_3<0$	$y_2^2+y_1y_3-2y_2y_2<0$
SRUR	$y_2^2+y_1y_3-2y_2y_2<0$	$y_1^2-y_2y_3>0$
SRTRUR	$y_1(y_2-2y_3)+y_3^2<0$	$y_1^2-y_2y_3<0$
RSTUST	$y_1+y_2-y_3>0$	$y_2y_2+y_1y_2-y_1y_3<0$
RSTSTUST	$y_1y_2+y_2y_3-y_1y_3>0$	$y_1+y_2-y_3<0$
RTURTU	$y_1^2-y_2y_2>0$	$y_1(y_2-2\cdot y_3)+y_3^2>0$
RSRTRTURTU	$y_1^2-y_2y_2<0$	$y_2^2+y_1y_3-2y_2y_3>0$
SRSTUSTU	$y_2^2+y_1y_3-2\cdot y_2y_3>0$	$y_1y_2+y_2y_3-y_1y_3>0$
STSTUSTU	$y_1(y_2-2\cdot y_3)+y_3^2>0$	$y_1+y_2-y_3>0$

Diese Bedingungen bestimmen 10 Bereiche, die jeweils von zweien aus den nachfolgend aufgeschriebenen 5 Kurven innerhalb des Bereiches F_1 begrenzt sind.

1) $y_1+y_2-y_3=0$ (c_1)
2) $y_1y_2-y_1y_3+y_2y_3=0$ (c_2)
3) $y_1y_2-2y_1y_3+y_3^2=0$ (c_3)
4) $y_2^2+y_1y_3-2y_2y_3=0$ (c_4)
5) $y_1^2-y_2y_3=0$ (c_5)

Das sind bis auf die Kurve c_1 lauter Kurven zweiter Ordnung, denen der Punkt mit den Koordinaten $(y = \sqrt{5}-1,\ y = 3-\sqrt{5},\ y = 2)$ gemeinsam ist.

Die gegenseitige Lage dieser Kurven ist in Figur 4 zu ersehen. Als Koordinatensystem wurde dabei ein inhomogenes, cartesisches gewählt, dessen Koordinaten aus den gegebenen durch die Gleichungen

$$Y_1 = \frac{y_1}{y_3}\ ;\quad Y_2 = \frac{y_2}{y_3}$$ hervorgehen.

Die Kurven erscheinen darin in der Gestalt:

$Y_1 + Y_2 = 1$	(c_1)	Gerade
$(Y_2 - 1)(Y_1 + 1) = -1$	(c_2)	Hyperbel
$Y_1(Y_2 - 2) = -1$	(c_3)	Hyperbel
$(Y_2 - 1)^2 = -(Y_1 - 1)$	(c_4)	Parabel
$Y_2 = Y_1^2$	(c_5)	Parabel

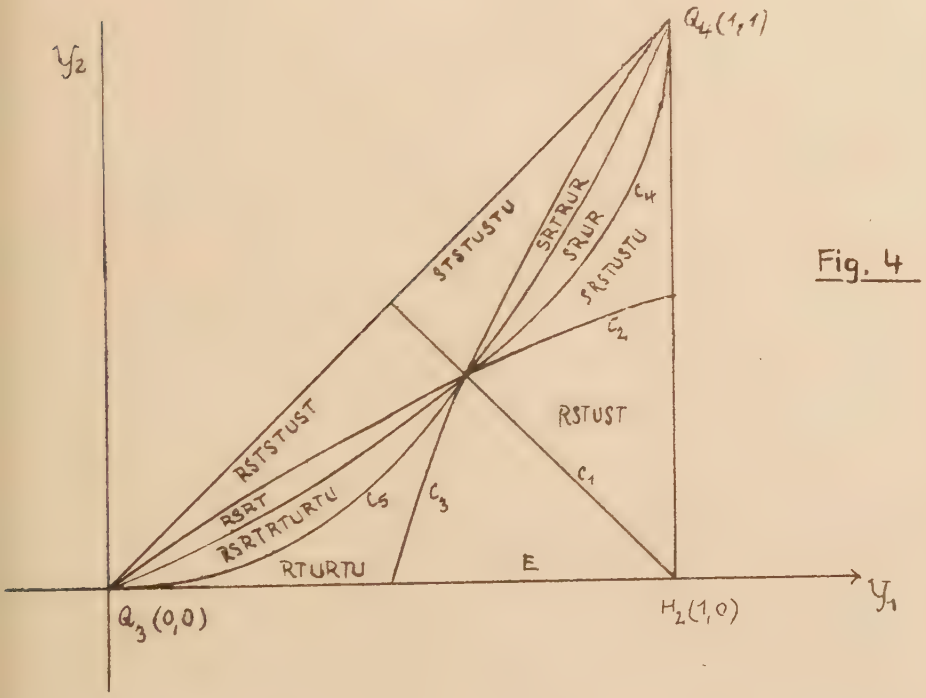


Fig. 4

Der Bereich $Y_1 + Y_2 - 1 < 0$ und $Y_1(Y_2 - 2) < -1$, von dem wir ausgingen, ist in Figur 4 mit E bezeichnet, weil er durch die Einheitstransformation E in sich übergeführt wird, die anderen Bereiche jeweils mit der Transformation, durch welche sie aus dem Be-

reich E hervorgingen.

Aus der Tatsache, dass $\mathcal{U}^{(2)}$ eine Gruppe ist und lauter umkehrbar eindeutige Transformationen enthält, folgt, dass jedesmal das ganze Innere von $\mathfrak{L}$ lückenlos auf das ganze Innere eines Bildbereiches innerhalb F_1 abgebildet wird. In Erweiterung gilt das auch für alle Transformationen von $\mathcal{G}^{(2)}$ und alls Bildbereiche von $\mathfrak{L}$, die irgendwo ausserhalb F_1 in der Ebene liegen.

Der Bereich $\mathfrak{L}$: 1) $y_3 > y_1 > y_2 > 0$

2) $y_1 + y_2 - y_3 < 0$ 3) $y_1(y_2 - 2\,y_3) + y_3 < 0$ oder

1) $1 > Y_1 > Y_2 > 0$ 2) $Y_1 + Y_2 - 1 < 0$ 3) $Y_1(Y_2 - 2) + 1 < 0$

stellt somit nach den Überlegungen im Anschluss an Satz 4 einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\mathcal{G}^{(2)}$ dar.

29) Bei den vorliegenden Betrachtungen sind die Ränder nicht in die Bereiche mit einbezogen worden, d.h. wir haben es immer mit offenen Bereichen zu tun. An den Rändern gibt es nämlich Stellen, wo die Abbildung unstetig wird, wo ganze Strecken das Abbild eines Punktes werden und umgekehrt. Dieser Umstand hat seinen Grund darin, dass wir es mit Cremona Transformationen zu tun haben und bei diesen treten - wie in der nächsten Nr.30 kurz aufgezeigt wird - solche Unstetigkeiten immer auf.

30) Die Abbildung bei den Cremona Transformationen ist bekanntlich im allgemeinen ein-eindeutig mit Ausnahme gewisser endlich vieler Punkte, denen ganze Kurven entsprechen. Wenn z.B. zwei Ebenen, in denen die Punkte X und X' durch die homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 und x_1', x_2', x_3' festgelegt sein mögen, durch die Transformation

$$(1) \qquad \varrho \cdot x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = (1,2,3)$$

aufeinander bezogen sind, und wenn die Formeln (1) eine eindeutige Umkehrung

$$(2) \quad \sigma x_i = \varphi_i(x_1', x_2', x_3') \qquad i = (1,2,3)$$

haben, wobei f_i und φ_i je drei ternäre Formen derselben Ordnung n sind, so ist durch die Formeln (1) und (2) eine Cremona Transformation festgelegt.

Betrachten wir das System der Geraden

$$(3) \quad \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0$$

der Ebene π', so entspricht diesem vermöge der Transformationsgleichungen (1) ein Netz von Kurven n-ter Ordnung:

$$(4) \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$$

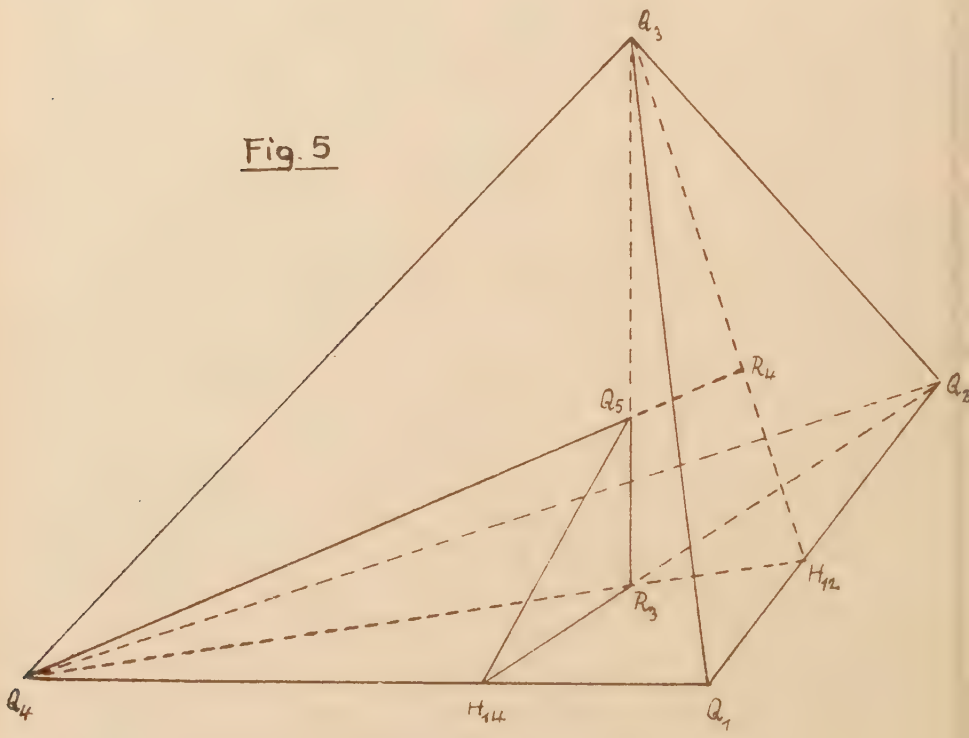
in π. Dem Schnittpunkt zweier Geraden von π' entspricht in π im allgemeinen wieder ein beweglicher Schnittpunkt zweier Kurven n-ter Ordnung, während die $(n^2 - 1)$ übrigen Schnittpunkte allen den Kurven n-ter Ordnung (4) gemein sind. Sie heißen die Basispunkte des Netzes. Dieselbe Betrachtung gilt bezüglich der Geraden der Ebene π und der zugehörigen Kurven n-ter Ordnung in π'. Diesen Basis- oder auch Hauptpunkten entsprechen nun für den Fall, dass sie r-fache Punkte des Netzes sind, zerfallende und nicht zerfallende Kurven r-ter Ordnung. Das Zerfallen oder Nichtzerfallen hängt davon ab, ob in dem betreffenden Basispunkt allen Kurven gemeinsame Tangenten vorhanden sind oder nicht.

Diese Eigenschaften der Cremona Transformationen spielen bei unseren Betrachtungen mit herein. Die Formen f_i unserer Transformationen sind - soweit sie nicht linear sind - alle 2.Grades und die Basispunkte sind bei den Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{U}^{(2)}$ alle einfach; es entsprechen ihnen also Gerade. Diese Unstetigkeitsstellen aber sind in die Grenzen des Fundamentalbereiches $\mathfrak{F}$ verlegt.

§ 8. Untersuchung der Gruppe $\mathcal{G}^{(3)}$ im dreidimensionalen Fall.

31) Die einzelnen Elemente der Transformationsgruppe $\mathcal{G}^{(3)}$ sind uns nach den Ausführungen des § 3 bekannt. Unter den Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 jeder Transformation aus $\mathcal{G}^{(3)}$ wollen wir die Tetraederkoordinaten eines Punktes in einem Raum, für welchen die Koordinaten eingeführt sind, verstehen.

Fig. 5



Das Koordinatentetraeder habe die Ecken Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und den Einheitspunkt Q_5, mithin die Flächen $Q_4Q_1Q_2$, $Q_4Q_1Q_3$, $Q_4Q_2Q_3$, $Q_1Q_2Q_3$, denen bezüglich die Flächengleichung $Y_3 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_1 = 0$, $Y_4 = 0$ zukommen soll (Figur 5).

Die Ebenen durch die Kanten Q_1Q_4, Q_2Q_4, Q_3Q_4, Q_1Q_2, Q_2Q_3 und Q_1Q_3 einerseits und durch den Einheitspunkt Q_5 andererseits, schneiden auf der entsprechenden Gegenkante des Tetraeders je einen Punkt aus, den wir bezüglich mit H_{23}, H_{13}, H_{12}, H_{34}, H_{14}, H_{24} bezeichnen wollen. Die Verbindungsgerade von Q_1 bezw. Q_2, Q_3, Q_4 mit Q_5 durchstößt die gegenüberliegende Ebene im Tetraeder in dem Punkte R_1 bezw. R_2, R_3, R_4.

Durch diese Ebenen $Q_1Q_2Q_5$ usw. wird das Innere des Tetraeders in 24 Teiltetraeder (A) zerlegt, deren einer Eckpunkt mit einem Eckpunkt des Koordinatentetraeders, deren zweiter mit dem Einheitspunkt Q_5, deren dritter mit einem der Punkte R_1, R_2, R_3, R_4 und deren letzter in gewisser Weise mit einem der Punkte $H_{\mu\nu}$ zusammenfällt. In Figur 5 ist das Teiltetraeder $Q_4Q_5R_3H_{14}$, als e i n solches hervorgehoben. Es sei $\mathfrak{T}_1$ benannt und ist ausgezeichnet durch die Bedingung $Y_4 > Y_1 > Y_2 > Y_3 > 0$; jedes andere der 24 Tetraeder aus (A) ist durch eine analoge Bedingung festgelegt, so zwar, dass den 24 Tetraedern aus (A) die 24 möglichen Anordnungen der Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 in der, jedes Tetraeder festlegenden Ungleichung entsprechen.

32) Es soll nun untersucht werden, was mit diesem Tetraeder bei den Transformationen von $\mathfrak{G}^{(3)}$ geschieht.

Satz 5. Das Tetraeder $\mathfrak{T}_1$ $(Y_4 > Y_1 > Y_2 > Y_3 > 0)$ wird bei den 48 Transformationen von $\mathfrak{G}^{(3)}$ je zweimal lückenlos auf die 24 Tetraeder (A), welche durch die Bedingung

$$Y_\lambda > Y_\mu > Y_\nu > Y_\varrho > 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu, \varrho) = (1,2,3,4)$$

festgelegt sind, abgebildet.

Beweis:
1) Für die Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{G}_2^{(3)}$ (siehe Nr.14) leuchtet ohne weiteres ein, dass jeder der 24 Bereiche einmal lückenlos das Abbild von $\mathfrak{T}_1$ wird.

2) Die Transformation $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_4}$ (T)

führt das Tetraeder $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ über in $0 < \frac{1}{y_4} < \frac{1}{y_1} < \frac{1}{y_2} < \frac{1}{y_3}$ d.h. $0 < Y_4 < Y_1 < Y_2 < Y_3$, wodurch alle Punkte eines Tetraeders aus (A) festgelegt sind. Die Transformation T führt wirklich alle Punkte von $\mathcal{T}_1$ lückenlos in das ganze Innere des Bildtetraeders über, da sie umkehrbar eindeutig ist. Nach dem, was unter 1) dieses Beweises über $\mathcal{G}^{(3)}_2$ und jetzt über T festgestellt wurde, ergibt sich leicht, dass die Transformationen von $\mathcal{G}^{(3)}_2$ T den Bereich $\mathcal{T}_1$ wieder, wie schon jene von $\mathcal{G}^{(3)}_2$, je einmal auf jeden Bereich aus (A) lückenlos abbilden, sodass also insgesamt jedes Tetraeder aus (A) zweimal das Abbild von $\mathcal{T}_1$ wird bei den Transformationen von $\mathcal{G}^{(3)}_1$. Insbesondere wird $\mathcal{T}_1$ durch die Einheitstransformation E und durch $(y_1, y_2)(y_3, y_4)T$ auf sich selbst abgebildet.

Für die weiteren Betrachtungen ist folgende Feststellung von Wert: Wenn die Koordinaten des Bildpunktes irgendeines Punktes aus $\mathcal{T}_1$ bei einer beliebigen Transformation G_ν von $\mathcal{G}^{(3)}$ die Bedingung Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 alle größer Null oder gleichbedeutend Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 alle kleiner Null erfüllen, dann ist diese Bedingung auch erfüllt für die Koordinaten aller Bildpunkte, die bei den Transformationen der zu G_ν gehörigen Nebengruppe entstehen, d.h. wenn eine Transformation G_ν einen Punkt aus $\mathcal{T}_1$ in einen inneren Punkt des Koordinatentetraeders überführt, dann tun das alle Transformationen der zugehörigen Nebengruppe auch. Dasselbe ist der Fall, wenn der Bildpunkt für G_ν in eines der noch möglichen Raumgebiete

Y_μ, Y_ν, Y_ρ alle 0; $Y_\sigma < 0$; $(\mu, \nu, \rho, \sigma) = (1,2,3,4)$;
Y_μ, Y_ν beide > 0; Y_ρ, Y_σ beide < 0; $(\mu, \nu, \rho, \sigma) = (1,2,3,4)$

welche wir als äussere in Bezug auf das Koordinatentetraeder bezeichnen wollen, zu liegen kommt. Der Grund für diesen Sachverhalt ist in der einfachen Bauart der Transformationen von $\mathcal{G}_1^{(3)}$ zu suchen. Es genügt demnach im weiteren, zu untersuchen auf welche Bereiche $\mathcal{F}_1$ durch die in § 3 Nr.14 angegebenen Transformationen, welches ja die für die Nebengruppen bestimmenden sind, abgebildet wird.

Satz 6. $\mathcal{F}_1$ wird durch die Transformationen

a) $(y_1,y_3)U(y_1,y_3)$ b) $(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$

c) $U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$ d) $U(y_1,y_4)TUT(y_1y_4)$

e) $(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$

lückenlos auf eines der Tetraeder aus (A) abgebildet.

Beweis.

a) $(y_1,y_3)U(y_1,y_3)$ hat die analytische Gestalt

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1}{y_1-y_3} : \frac{y_2}{y_2-y_3} : 1 : \frac{y_4}{y_4-y_3} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{y_3}{y_1}} : \frac{1}{1-\frac{y_3}{y_2}} : 1 : \frac{1}{1-\frac{y_3}{y_4}}$$

Aus der Bedingung für $\mathcal{F}_1$: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt

$$0 < \frac{y_3}{y_4} < \frac{y_3}{y_1} < \frac{y_3}{y_2} < 1 \quad \text{oder} \quad 1 > 1 - \frac{y_3}{y_4} > 1 - \frac{y_3}{y_1} > 1 - \frac{y_3}{y_2} > 0$$

$$\text{oder} \quad 1 < \frac{1}{1-\frac{y_3}{y_4}} < \frac{1}{1-\frac{y_3}{y_1}} < \frac{1}{1-\frac{y_3}{y_2}} \quad \text{d.h.} \quad 0 < Y_3 < Y_4 < Y_1 < Y_2,$$

wodurch eine Bereich aus (A) festgelegt ist.

Insbesondere bilden $(y_2,y_4)(y_1,y_3)U(y_1,y_3)$ und $(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_2,y_4)(y_1,y_3)U(y_1,y_3)$ $\mathcal{F}_1$ auf sich ab.

b) $(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ hat die analytische Gestalt:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = (1-\frac{y_1}{y_4}):(1-\frac{y_2}{y_4}):(1-\frac{y_3}{y_4}) : 1$$

Aus der Bedingung für $\mathfrak{Y}_1$: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt

$1 > \frac{y_1}{y_4} > \frac{y_2}{y_4} > \frac{y_3}{y_4} > 0$ oder $0 < 1-\frac{y_1}{y_4} < 1-\frac{y_2}{y_4} < 1-\frac{y_3}{y_4} < 1$

d.h. $0 < Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$, wodurch ein Bereich aus (A) festgelegt ist.

Insbesondere bilden $(y_1,y_3)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ und $(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_1,y_3)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ den Bereich $\mathfrak{Y}_4$ auf sich ab.

c) $U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$ hat die analytische Gestalt:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : \frac{y_2}{y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} : \frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}$$

Aus der Bedingung für $\mathfrak{Y}_1$: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt [2]

$\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1} > 1 > \frac{y_2}{y_1} > \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} > 0$, d.h. $Y_4 > Y_1 > Y_2 > Y_3 > 0$,

wodurch ein Tetraeder aus (A) festgelegt ist. Insbesondere bilden $U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$ und $(y_1,y_2)(y_3,y_4)TU(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$ den Bereich $\mathfrak{Y}_1$

d) $U(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ hat die analytische Gestalt:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : \frac{y_2-y_4}{y_2-y_1} : \frac{y_3-y_4}{y_3-y_1} : \frac{y_4}{y_1}$$

Hieraus ergibt sich [3], wenn man für y_3,y_2,y_1,y_4 die Werte 1,2,3,4 einsetzt, die Ungleichung $Y_2 > Y_3 > Y_4 > Y_1 > 0$, wodurch ein Tetraeder aus (A) festgelegt ist.

---

2) Nähere Ausführungen zu diesem Schluss gibt Nr.32 a.

3) Hierbei kommen wieder die Überlegungen von Nr.32 a zur Verwendung.

Insbesondere bilden $(y_1,y_3)(y_2,y_4)U(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ und $(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_1,y_3)(y_2,y_4)U(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ den Bereich $\mathfrak{Z}_1$ auf sich ab.

e) $(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$ hat die analytische

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1-y_3}{y_1-y_2} : 1 : \frac{y_3}{y_2} : \frac{y_4-y_3}{y_4-y_2}$$

Hieraus ergibt sich [4], wenn man für y_3,y_2,y_1,y_4 die Werte 1,2,3,4 einsetzt, die Ungleichung $Y_1 > Y_4 > Y_2 > Y_3 > 0$, wodurch ein Tetraeder aus (A) festgelegt ist.

Insbesondere bilden $(y_1,y_4)(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$ und $(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_1,y_4)(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$ den Bereich $\mathfrak{Z}_1$ auf sich ab.

Der Beweis des Satzes 6 ist damit abgeschlossen, bis auf den Nachweis der Lückenlosigkeit der Abbildung, wofür auf die Ausführungen im Anschluss an Satz 8 verwiesen sei (Nr.35).

Nachdem wir gesehen haben, dass die in Satz 6 genannten Transformationen $\mathfrak{Z}_1$ nur auf Bereiche aus (A) abbilden, ist es - gemäß den Erkenntnissen über $\mathfrak{G}_1^{(3)}$ in Satz 5 und in den anschließenden Betrachtungen - klar, dass die Transformationen der zugehörigen Nebengruppen $\mathfrak{Z}_1$ je zweimal auf jeden der Bereiche aus (A) abbilden, sodass also jeder solche Bereich im ganzen 12-mal als Bildbereich von $\mathfrak{Z}_1$ erscheint. Im besonderen bilden die im Anschluss an Satz 5 und an die einzelnen Nummern a, b, c, d und e des Satzes 6 genannten Transformationen $\mathfrak{Z}_1$ auf sich ab. Andere als die in den eben betrachteten Nebengruppen vorkommenden Transformationen bilden innere Punkte des Koordinatentetraeders

---

4) Abermals gemäß Nr.32 a.

nicht auf innere ab und insbesondere bilden andere als die angeführten Transformationen $\mathfrak{T}_1$ nicht auf sich selbst ab. Aus diesem Grunde bilden diese 12 Transformationen eine Untergruppe $\mathfrak{U}^{(3)}$ von $\mathfrak{G}^{(3)}$.

32 a) Zur Vervollständigung der Überlegungen der vorigen Nr.32 (vgl. Anm.2 bis 4) fügen wir eine Betrachtung über das Größer- und Kleinersein von Ausdrücken der Form $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}, \frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}$ unter der Bedingung $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$. Es handelt sich darum den Werteverlauf der Funktion $z = \frac{y-y_2}{y-y_1}$ oder in anderer Form $(y-y_1)(z-1) = y_1 - y_2$ zu ermitteln. Die durch die Funktion dargestellte Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel mit zu den Achsenrichtungen des Koordinatensystems parallelen Asymptoten.

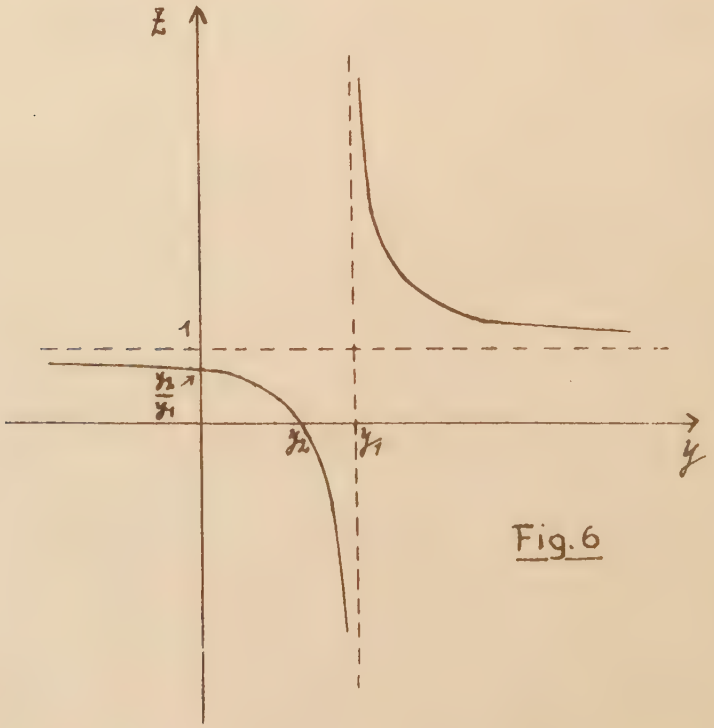


Fig.6

Aus der Figur 6, welche diese Hyperbel darstellt, erkennt man - da y_3 zwischen 0 und y_2 liegt -, dass z_3 größer als Null und kleiner als $\frac{y_2}{y_1}$ (<1) ist, dass ferner $z_4 > 1$, da $y_4 > y_1$, sodass sich insgesamt ergibt:

$$z_4 > 1 > \frac{y_2}{y_1} > z_3 \quad \text{oder} \quad \frac{y_4-y_2}{y_4-y_1} > 1 > \frac{y_2}{y_1} > \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} > 0$$

Dieses Ergebnis gilt für alle Zahlenwerte y_1, y_2, y_3, y_4, welche der für sie geforderten Einschränkung unterworfen sind. Es genügt also hier und wird in analogen Fällen genügen, für die y_1, y_2, y_3, y_4 spezielle, mit den Bedingungen verträgliche Zahlenwerte einzusetzen und die z-Werte miteinander zu vergleichen.

33) Es sollen nunmehr diejenigen Transformationen studiert werden, welche $\mathfrak{T}_1$ in Aussenbereiche des Koordinatentetraeders überführen, die durch die Bedingung

$$Y_\lambda > Y_\mu > Y_\nu > 0 > Y_\varrho \qquad (\lambda,\mu,\nu,\varrho) = (1,2,3,4)$$

gekennzeichnet sind. Figur 7 gibt eine Vorstellung vom Aussehen eines solchen Bereiches (dort $y_1 > y_4 > y_2 > 0 > y_3$).

Der gezeichnete Bereich ist ein Tetraeder des projektiven Raumes. Er hat die Grundfläche $R_3Q_1H_{14}$ und darüber erheben sich ins Äussere des Koordinatentetraeders die Dreiecke $Q_1H_{14}Q_3$, $Q_1R_3Q_3$, $R_3H_{14}Q_3$ (diese Dreiecke werden alle von der uneigentlichen Ebene zerlegt). Es gibt - entsprechend den 24 Anordnungsmöglichkeiten der y_1, y_2, y_3, y_4 - 24 solcher Bereiche (B).

Satz 7. $\mathfrak{T}_1$ wird durch die Transformationen:

a) $(y_1,y_2)U(y_1,y_2)$ b) $(y_1,y_4)U(y_1,y_4)$ c) TUT

d) $(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$ e) $U(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$

f) $(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$

auf je einen aus den Bereichen (B) abgebildet.

Beweis:

a) $(y_1,y_2)U(y_1,y_2)$ hat die analytische Gestalt:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1}{y_1-y_2} : 1 : \frac{y_3}{y_3-y_2} : \frac{y_4}{y_4-y_2} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{y_2}{y_1}} : 1 : \frac{1}{1-\frac{y_2}{y_3}} : \frac{1}{1-\frac{y_2}{y_4}}$$

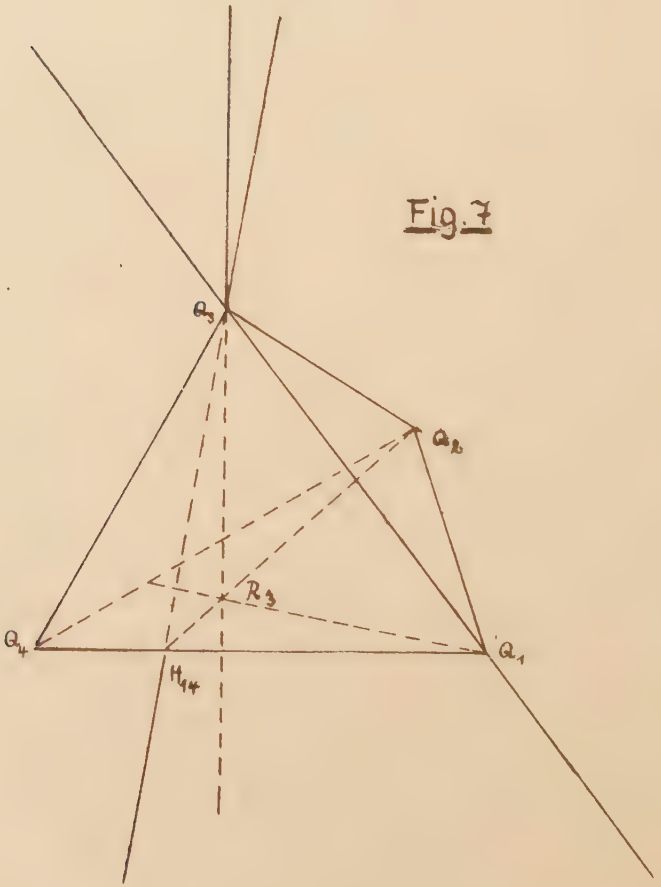


Fig. 7

Aus der Bedingung für γ_1: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt:

1) $1 > \frac{y_2}{y_1} > \frac{y_2}{y_4} > 0$ oder $1 > 1 - \frac{y_2}{y_4} > 1 - \frac{y_2}{y_1}$ oder

$$1 < \frac{1}{1 - \frac{y_2}{y_4}} < \frac{1}{1 - \frac{y_2}{y_1}}$$

2) $1 - \frac{y_2}{y_3} < 0$ oder $\frac{1}{1 - \frac{y_2}{y_3}} < 0$

1) und 2) zusammen bedeuten:

$$\frac{1}{1 - \frac{y_2}{y_3}} < 0 < 1 < \frac{1}{1 - \frac{y_2}{y_4}} < \frac{1}{1 - \frac{y_2}{y_1}} \quad \text{d.h. } Y_3 < 0 < Y_2 < Y_4 < Y_1$$

wodurch ein Bereich aus (B) festgelegt ist.

b) $(y_1, y_4) \cup (y_1, y_4)$ hat die analytische Form:

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \frac{y_1}{y_1 - y_4} : \frac{y_2}{y_2 - y_4} : \frac{y_3}{y_3 - y_4} : 1 =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{y_4}{y_1}} : \frac{1}{1 - \frac{y_4}{y_2}} : \frac{1}{1 - \frac{y_4}{y_3}} : 1$$

Aus der Bedingung für γ_1: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt:

1) $1 < \frac{y_4}{y_1} < \frac{y_4}{y_2} < \frac{y_4}{y_3}$ oder $0 > 1 - \frac{y_4}{y_1} > 1 - \frac{y_4}{y_2} > 1 - \frac{y_4}{y_3}$

oder $0 > \frac{1}{1 - \frac{y_4}{y_3}} > \frac{1}{1 - \frac{y_4}{y_2}} > \frac{1}{1 - \frac{y_4}{y_1}}$

2) $Y_4 > 0$ 1) und 2) zusammen bedeuten

$Y_4 > 0 > Y_3 > Y_2 > Y_1$ oder multipliziert mit (-1)

$Y_1' > Y_2' > Y_3' > 0 > Y_4'$, wodurch ein Bereich aus (B) festgelegt ist.

c) TUT hat die analytische Gestalt:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : (1 - \frac{y_2}{y_1}) : (1 - \frac{y_3}{y_1}) : (1 - \frac{y_4}{y_1})$$

Aus der Bedingung für $\mathfrak{T}_1$: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt

1) $1 > \frac{y_2}{y_1} > \frac{y_3}{y_1} > 0$ oder $(1 - \frac{y_2}{y_1}) < (1 - \frac{y_3}{y_1}) < 1$

2) $\frac{y_4}{y_1} > 1$ oder $(1 - \frac{y_4}{y_1}) < 0$ 1) und 2) zusammen

bedeuten: $(1 - \frac{y_4}{y_1}) < 0 < (1 - \frac{y_2}{y_1}) < (1 - \frac{y_3}{y_1})$ 1; d.h.

$Y_4 < 0 < Y_2 < Y_3 < Y_1$, wodurch ein Bereich aus (B) festgelegt ist.

d) $(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$ hat die analytische Form:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = (1 - \frac{y_1}{y_3}) : (1 - \frac{y_2}{y_3}) : 1 : (1 - \frac{y_4}{y_3})$$

Aus der Bedingung für $\mathfrak{T}_1$: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt

$\frac{y_4}{y_3} > \frac{y_1}{y_3} > \frac{y_2}{y_3} > 1$ oder $1 - \frac{y_4}{y_3} < 1 - \frac{y_1}{y_3} < 1 - \frac{y_2}{y_3} < 0 < 1$

d.h. $Y_4 < Y_1 < Y_2 < 0 < Y_3$ oder nach Multiplikation mit

(-1) $Y'_3 < 0 < Y'_2 < Y'_1 < Y'_4$, wodurch ein Bereich (B) festgelegt ist.

e) $U(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$ hat die analytische Form:

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : \frac{y_2-y_3}{y_2-y_1} : \frac{y_3}{y_1} : \frac{y_4-y_3}{y_4-y_1}$$

Hier verfährt man nach den in Nr.32 a angegebenen Regeln und erhält durch Einsetzen der speziellen Werte $y_3 = 1$, $y_2 = 2$, $y_1 = 3$ das Ergebnis

$Y_2 < 0 < Y_3 < Y_1 < Y_4$; wodurch eine Bereich aus (B) festgelegt ist.

f) $(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$ hat die analytische Form $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1-y_4}{y_1-y_2} : 1 : \frac{y_3-y_4}{y_3-y_2} : \frac{y_4}{y_2}$

Eine analoge Betrachtung, wie unter e), für die speziellen Werte $y_3 = 1$, $y_2 = 2$, $y_4 = 3$ führt zu dem Ergebnis $Y_1 < 0 < Y_2 < Y_4 < Y_3$, wodurch auch wieder ein Bereich aus (B) festgelegt ist.

Die Transformationen einer Nebengruppe von $\mathcal{G}_1^{(3)}$, welche zu einer der in Satz 7 aufgeführten Transformationen gehört, führen $\mathcal{T}_1$ - wie das aus den Betrachtungen über die Untergruppe $\mathcal{G}_1^{(3)}$ (Nr.32) folgt - je zweimal in jeden der 24 Bereiche (B) über, so dass also diese Bereiche, da wir nach Satz 7 6 solcher Nebengruppen haben, je 12-mal das Abbild von $\mathcal{T}_1$ werden.

34) Die letzte Art von Bereichen - es waren jetzt Bereiche der Art (A) und (B) (siehe Nr.31 und 33) Gegenstand der Betrachtungen - sind diejenigen, welche durch die Bedingung:

$$Y_\lambda < Y_\mu < 0 < Y_\nu < Y_\rho \qquad (\lambda,\mu,\nu,\rho) = (1,2,3,4)$$

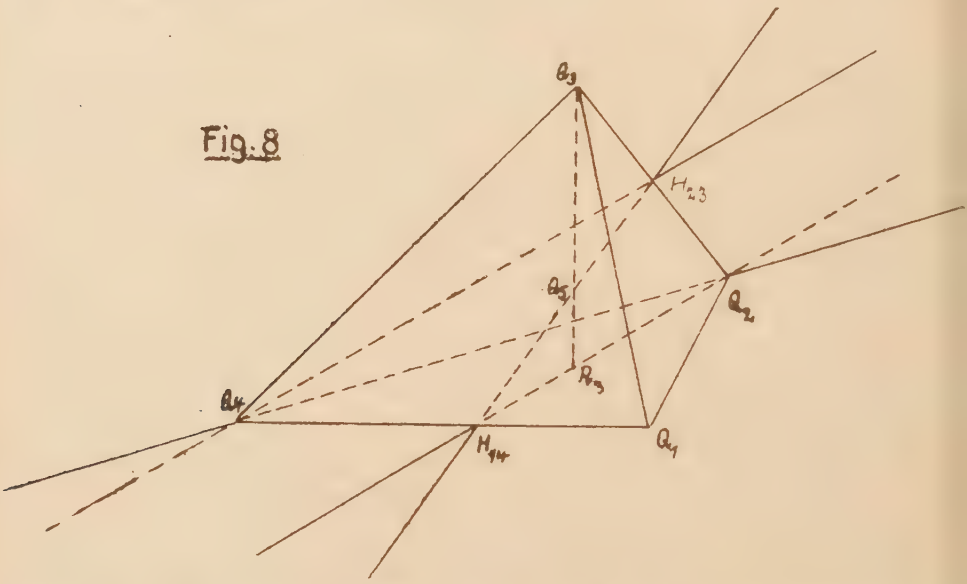
gekennzeichnet sind. Über ihr Aussehen und den Zusammenhang mit dem Koordinatentetraeder gibt die Figur 8 Auskunft, wo einer, festgelegt durch die Bedingung $y_2 < y_3 < 0 < y_1 < y_4$ gezeichnet ist. Es ist ein Tetraeder des projektiven Raumes, das längs der Strecken $H_{23}Q_2$ und $H_{14}Q_4$ mit dem Koordinatentetraeder in Zusammenhang steht. Von diesen Kanten $H_{23}Q_2$ und $H_{14}Q_4$ erstrecken sich die Begrenzungsdreiecke $H_{23}Q_2H_{14}$, $H_{23}Q_2Q_4$, $H_{14}Q_4H_{23}$, $H_{14}Q_4Q_2$, welche alle von der uneigentlichen Ebene zerlegt werden, ins Äussere des Koordinatentetraeders.

Bereiche solcher Art gibt es jedoch nicht etwa auch $4! = 24$, wie es der Anzahl der möglichen Anordnung der

$y_\lambda, y_\mu, y_\nu, y_\varrho$ entspräche, sondern nur 12, weil allgemein durch die Bedingung $y_\lambda < y_\mu < 0 < y_\nu < y_\varrho$ und durch $y_\varrho < y_\nu < 0 < y_\mu < y_\lambda$ derselbe Bereich festgelegt ist. Wir bennen diese Bereiche insgesamt mit (C).

Wieweit diese Bereiche (C) bei den Transformationen von $\mathfrak{G}^{(3)}$ als Bildbereiche vorkommen, darüber erteilt der folgende Satz 8 Aufschluss.

Fig.8



Satz 8. Der Bereich $\mathfrak{F}_1$ wird bei den Transformationen
a) U b) $(y_1,y_2)\mathrm{TUT}(y_1,y_2)$
c) $(y_1,y_3)\mathrm{U}(y_1,y_3)(y_1,y_4)\mathrm{TUT}(y_1,y_4)$

in einen der Bereiche aus (C) übergeführt.

Beweis:

a) U hat die analytische Form

$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : \frac{y_2}{y_2-y_1} : \frac{y_3}{y_3-y_1} : \frac{y_4}{y_4-y_1} =$$

$$= 1 : \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_2}} : \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_3}} : \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_4}}$$

Aus der Bedingung für γ_1 $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt

1) $1 < \frac{y_1}{y_2} < \frac{y_1}{y_3}$ oder $0 > 1 - \frac{y_1}{y_2} > 1 - \frac{y_1}{y_3}$ oder

$$\frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_2}} < \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_3}} < 0 \qquad 2) \quad \frac{y_4}{y_4 - y_1} > 1$$

1) und 2) zusammen besagen:

$$\frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_2}} < \frac{1}{1 - \frac{y_1}{y_3}} < 0 < 1 < \frac{y_4}{y_4 - y_1} \quad \text{d.h. } Y_2 < Y_3 < 0 < Y_1 < Y_4,$$

wodurch der in Figur 8 dargestellte Bereich festgelegt ist.

b) $(y_1,y_2)\text{TUT}(y_1,y_2)$ hat die analytische Form:

$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = (y_2 - y_1) : y_2 : (y_2 - y_3) : (y_2 - y_4)$

Aus der Bedingung für γ_1: $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ folgt unmittelbar $(y_2 - y_4) < (y_2 - y_1) < 0 < (y_2 - y_3) < y_2$; d.h. $Y_4 < Y_1 < 0 < Y_3 < Y_2$, wodurch eine Bereich aus (C) festgelegt ist.

c) $(y_1,y_3)\text{U}(y_1,y_3)(y_1,y_4)\text{TUT}(y_1,y_4)$ hat die analytische Form

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \frac{y_1 - y_4}{y_1 - y_3} : \frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_3} : 1 : \frac{y_4}{y_3}$$

Eine Untersuchung nach dem in Nr.32 a angegebenen Verfahren für die speziellen Werte $y_3 = 1$, $y_2 = 2$, $y_1 = 3$, $y_4 = 4$ zeitigt das Ergebnis $Y_2 < Y_1 < 0 < Y_3 < Y_4$, wodurch zum Schluss des Beweises wieder ein Bereich aus (C) festgelegt ist.

Die Abbildung von $\mathfrak{T}_1$ auf Bereiche der Art (C) durch die Transformationen von Nebengruppen, welche durch die Transformationen des Satzes 8 bestimmt sind, ist etwas anders, wie die Abbildung auf Bereiche der Art (A) oder (B). Denn wir haben gesehen, dass durch die Bedingung $Y_\lambda < Y_\mu < 0 < Y_\nu < Y_\varrho$ und durch $Y_\varrho < Y_\nu < 0 < Y_\mu < Y_\lambda$ derselbe Bereich festgelegt ist. Es wird also hier schon durch die Transformationen der Nebengruppe von $\mathfrak{G}_2^{(3)}$ (siehe § 3, Nr.14) $\mathfrak{T}_1$ je zweimal auf jeden Bereich aus (C) abgebildet, durch die Transformationen der Nebengruppe von $\mathfrak{G}_1^{(3)} = \mathfrak{G}_2^{(3)} + \mathfrak{G}_2^{(3)}$, also im ganzen viermal auf jeden Bereich aus (C). Da wir aber insgesamt nur drei Nebengruppen von $\mathfrak{G}_1^{(3)}$ haben, welche Bereiche aus (C) als Bilder liefern, so wird also jeder Bereich aus (C) 4 x 3 = 12-mal das Abbild von $\mathfrak{T}_1$, also genau so oft wie die Bereiche aus (A) und (B).

In Zusammenfassung der Ergebnisse der Nr.32, 33, 34 können wir also feststellen, dass das Tetraeder $\mathfrak{T}_1$ durch die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}^{(3)}$ je 12-mal auf jeden der Bereiche aus (A) (Nr.31), (B) (Nr.33) und (C) (Nr.34) abgebildet wird. Die Bereiche aus (A), (B) und (C) erfüllen aber zusammen bis auf ihre Grenzen den dreidimensionalen Raum.

35) Jetzt lässt sich ohne große Mühe der Nachweis führen, dass $\mathfrak{T}_1$ bei allen diesen Transformationen aus $\mathfrak{G}^{(3)}$ immer lückenlos auf einen aus den Bereichen (A), (B) oder (C) abgebildet wird; denn wir haben gesehen: Das ganze Innere von $\mathfrak{T}_1$ wird durch irgendeine Transformation G_ν aus $\mathfrak{G}^{(3)}$ auf das Ganze oder Teile eines Bereiches aus (A), (B) oder (C) abgebildet und, wie wir nunmehr wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}^{(3)}$ sagen können, auch das ganze Innere jedes beliebigen Bereiches $\mathfrak{T}''$ aus (A), (B) oder (C) wird durch

eine beliebige Transformation aus $\mathfrak{G}^{(3)}$ auf das Ganze oder auf Teile eines Bereiches $\mathfrak{T}'''$ aus (A), (B) oder (C) abgebildet. Würde nun G_ν den Bereich $\mathfrak{T}_1$ auf Teile von $\mathfrak{T}'$ abbilden, so müsste notwendigerweise die inverse Transformation G_ν^{-1} diese Teile von $\mathfrak{T}'$ wieder in das ganze Innere von $\mathfrak{T}_1$ überführen. Andererseits bildet G_ν^{-1} als Transformation von $\mathfrak{G}^{(3)}$ das ganze Innere von $\mathfrak{T}'$ auf das Ganze oder Teile von $\mathfrak{T}_1$ ab. Diese beiden Tatbestände sind nur vereinbar, wenn G_ν das Tetraeder $\mathfrak{T}_1$ auf das ganze Innere von $\mathfrak{T}'$ abbildet. Die Abbildung von $\mathfrak{T}_1$ ist also auf jeden Fall lückenlos.

36). Das Tetraeder $\mathfrak{T}_1$ wird - wie das im Anschluss an Satz 6 (Nr.32) schon hervorgehoben wurde - auch 12-mal auf sich selbst abgebildet und zwar durch die Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{U}^{(3)}$ von $\mathfrak{G}^{(3)}$. Diese Selbstabbildung des Bereiches $\mathfrak{T}_1$ bei den Transformationen von $\mathfrak{U}^{(3)}$ soll Gegenstand genauerer Untersuchungen sein; aus diesem Grunde werden wir zunächst einmal die Transformationen von $\mathfrak{U}^{(3)}$ in ihrer Darstellung als Funktionen der y_1, y_2, y_3, y_4 aufschreiben:

1) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = y_1:y_2:y_3:y_4$ (E)

2) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_4} : \frac{1}{y_3}$ $(y_1,y_2)(y_3,y_4)\cdot T$

3) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1}{y_1-y_3} : \frac{y_4}{y_4-y_3} : 1 : \frac{y_2}{y_2-y_3}$

$(y_2,y_4)(y_1,y_3)U(y_1,y_3)$

4) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_4-y_3}{y_4} : \frac{y_1-y_3}{y_1} : \frac{y_2-y_3}{y_2} : 1$

$(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_3,y_4)(y_1,y_3)U(y_1,y_3)$

5) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = (y_4-y_3):(y_4-y_2):(y_4-y_1):y_4$

$(y_1,y_3)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$

6) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{1}{y_4-y_2} : \frac{1}{y_4-y_3} : \frac{1}{y_4} : \frac{1}{y_4-y_1}$

$(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_1,y_3)(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$

7) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : \frac{y_2}{y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} : \frac{y_4-y_2}{y_4-y_1}$

$U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$

8) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1}{y_2} : 1 : \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2} : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$

$(y_1,y_2)(y_3,y_4)T\ U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$

9) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_3-y_4}{y_3-y_1} : \frac{y_4}{y_1} : 1 : \frac{y_2-y_4}{y_2-y_1}$

$(y_1,y_3)(y_2,y_4)U(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$

10) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_1}{y_2} : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_4} : \frac{y_2-y_1}{y_2-y_4} : 1$

$(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_1,y_3)(y_2,y_4)U(y_1,y_4)TUT(y_1,y_4)$

11) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = \frac{y_4-y_3}{y_4-y_2} : 1\ \frac{y_3}{y_2} : \frac{y_1-y_2}{y_1-y_2}$

$(y_1,y_4)(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1,y_3)$

12) $Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = 1 : \frac{y_4-y_2}{y_4-y_3} : \frac{y_1-y_2}{y_1-y_3} : \frac{y_2}{y_3}$

$(y_1,y_2)(y_3,y_4)T(y_1,y_2)(y_1,y_2)U(y_1,y_2)(y_1,y_3)TUT(y_1$

Das Ziel der kommenden Betrachtungen ist es jetzt, innerhalb $\mathcal{Y}_1$ einen Teilbereich $\mathcal{A}$ zu finden, der bei den Transformationen von $\mathcal{U}^{(3)}$ 12 Bilder liefert, die zusammen bis auf ihre Grenzen das Tetraeder $\mathcal{Y}_1$ gerade einmal lückenlos erfüllen. Ein solcher Bereich

hat offenbar die Eigenschaften, die wir von einem Fundamentalbereich fordern: Er wird durch die Transformationen von $\mathfrak{U}^{(3)}$ auf Bereiche abgebildet, die bis auf ihre Grenzen den ganzen Raum gerade einmal überdecken; denn $\mathfrak{A}$ wird durch die 12 Transformationen U_ν aus $\mathfrak{U}^{(3)}$ einmal auf das ganze Innere von $\mathfrak{Z}_1$ abgebildet. Es bleiben also noch 14 Bereiche aus (A), (B) oder (C) (Nr.34). $\mathfrak{Z}_1$ werde nun durch die Transformation G' aus $\mathfrak{G}^{(3)}$ in $\mathfrak{Z}'$, einen willkürlich aus den noch übrigen 14 Bereichen herausgegriffenen übergeführt. Dann gilt, wenn wir in Zeichen das Abbild von $\mathfrak{A}$ mittels der Transformation U_ν, durch $U_\nu(\mathfrak{A})$ wiedergeben:

$$\sum_{\nu=1}^{12} U_\nu(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Z}_1; \quad \mathfrak{Z}' = G'(\mathfrak{Z}_1) = G'\Big(\sum_{\nu=1}^{12} U_\nu(\mathfrak{A})\Big) = \sum_{\nu=1}^{12} G'U_\nu(\mathfrak{A})$$

Die 12 Transformationen $G'U_\nu$ sind gerade jene, welche $\mathfrak{Z}_1$ in $\mathfrak{Z}'$ 12-mal überführten, sie bilden also $\mathfrak{A}$ auf Teile von $\mathfrak{Z}'$ ab, so zwar, dass die Summe dieser Bilder $\mathfrak{Z}'$ einmal erfüllt. Da die 15 Bereiche aus (A), (B) oder (C) den ganzen Raum ausmachen, so ist damit erwiesen, dass $\mathfrak{A}$ bei den Transformationen von $\mathfrak{G}^{(3)}$ Bilder liefert, die bis auf ihre Grenzen den ganzen Raum einmal lückenlos überdecken. Ein Bereich $\mathfrak{A}$ mit den angegebenen Eigenschaften gegenüber den Transformationen der Untergruppe $\mathfrak{U}^{(3)}$ ist also wirklich ein Fundamentalbereich.

37) Satz 9. Der durch die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0 \\ \text{II.} & \text{a) } y_1y_2 - y_3y_4 > 0 \quad \text{b) } y_2y_3 + y_1y_4 - y_2y_4 - y_1y_2 > 0 \end{array}\right\} (\mathfrak{A}_1)$$

bestimmte Bereich $(\mathfrak{A}_1)$ innerhalb $\mathfrak{Z}_1$ wird durch die 12 Transformationen von $\mathfrak{U}^{(3)}$ je zweimal in 6 Bereiche übergeführt, die bis auf ihre Grenzen $\mathfrak{Z}_1$ gerade einmal überdecken.

Beweis.

Wir zeigen auf, wie die einzelnen Transformationen von $\mathfrak{U}^{(3)}$ den angegebenen Bereich transformieren, d.h. wie sie die Ungleichungen II a und b verändern. (Die Ungleichung I bleibt ja dabei erhalten.) Die Transformationen sind jeweils durch die Nummer benannt, unter der sie oben in der Zusammenstellung der Elemente von $\mathfrak{U}^{(3)}$ erschienen sind. Die folgende Zusammenstellung gibt die Ungleichungen an, die durch Transformation mittels der jeweils angegebenen Elemente von $\mathfrak{U}^{(3)}$ aus a bezw. b entstehen und zwar ist jedesmal zuerst die transformierte Ungleichung a angeschrieben.

1) lässt die Ungleichungen natürlich bestehen

2) a) $y_1y_2-y_3y_4<0$ c) $y_2y_2+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4>0$

3) b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_2<0$ a) $y_1y_2-y_3y_4<0$

4) c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4<0$ a) $y_1y_2-y_3y_4>0$

5) c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4>0$ b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_2<0$

6) b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_2>0$ c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4<0$

7) a) $y_1y_2-y_3y_4<0$ c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4>0$

8) a) $y_1y_2-y_3y_4>0$ b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_2>0$

9) c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4<0$ a) $y_1y_2-y_3y_4>0$

10) b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_4<0$ a) $y_1y_2-y_3y_4<0$

11) c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4>0$ b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_2<0$

12) b) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_1y_2>0$ c) $y_2y_3+y_1y_4-y_2y_4-y_3y_4<0$

Der Bereich $\mathfrak{A}_1$ geht also bei der Transformation 8) in sich über.

38) Eine Vorstellung von der räumlichen Lage dieser Bereiche, die als Bilder von $\mathfrak{k}_1$ auftreten, soll uns ihre Darstellung durch die Zeichnung geben (Fig.9 a, b, c).

Fig. 9a

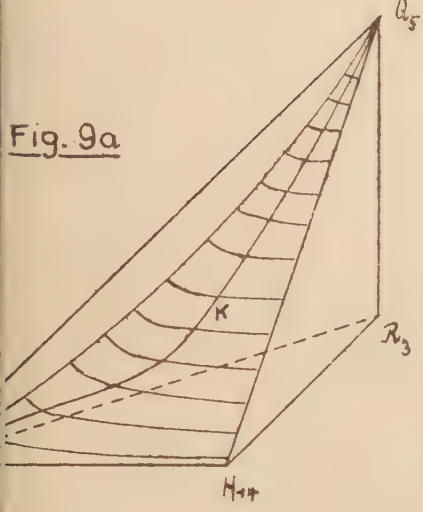


Fig. 9b

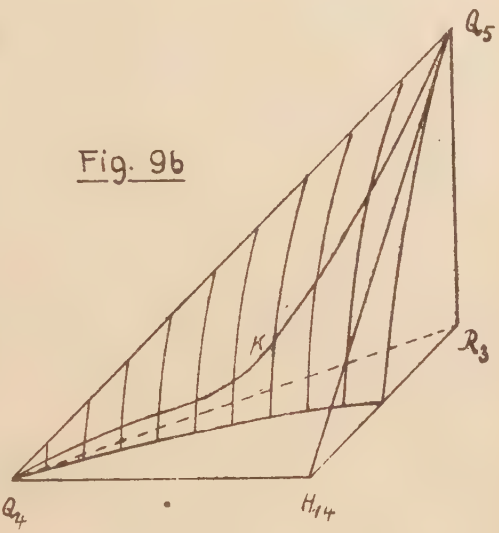
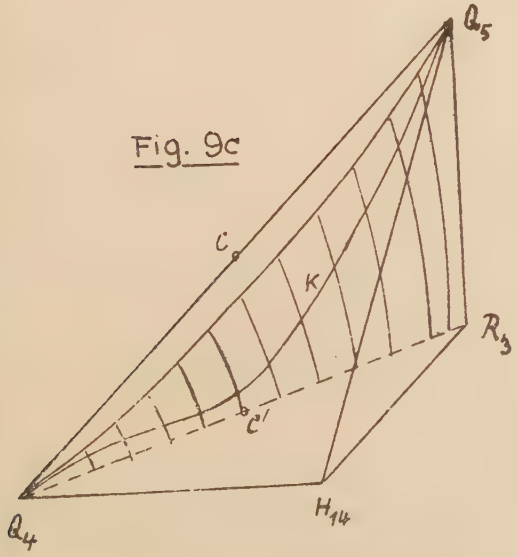


Fig. 9c



Wir wählen zur Darstellung ein inhomogenes kartesisches Koordinatensystem, in welches das bisher verwendete durch die Transformationsgleichungen

$$\frac{y_1}{y_4} = Y_1; \quad \frac{y_2}{y_4} = Y_2; \quad \frac{y_3}{y_4} = Y_3$$

übergeht. Die drei bei den Betrachtungen vorgekommenen Flächen a, b, c erhalten in diesem System die Gleichungen

$$Y_1Y_2-Y_3 = 0 \quad (a) \qquad Y_1+Y_2Y_3-Y_1Y_2-Y_2 = 0 \quad (b)$$

$$Y_1+Y_2Y_3-Y_2-Y_3 = 0 \quad (c)$$

Es sind Flächen zweiter Ordnung, die einem Büschel angehören, denn es besteht augenscheinlich die Beziehung (a)+(b)-(c) = 0. Die gemeinsame Kurve K geht durch die Punkte (0, 0, 0) und (1, 1, 1) und ihre Projektion in die Y_1Y_2-Ebene hat die Gleichung $Y_1^2Y_2-Y_1Y_2+Y_1-Y_2 = 0$. Da diese Gleichung der Projektionskurve, als Polynom betrachtet, irreduzibel ist - was sich leicht einsehen lässt, wenn man das Polynom als ein solches von Y_2 allein auffasst - kann die Schnittkurve dieser Flächen einmal nicht in zwei Kurven zweiter Ordnung zerfallen, was zur Folge hätte, dass die Projektion auch aus zwei Kurven zweiter Ordnung bestünde, zum andern kann sie nicht in eine Raumkurve dritter Ordnung und eine Gerade zerfallen, weil die Gerade höchstens noch die Gleichung $Y_1 = c_1$; $Y_2 = c_2$ haben könnte, die Fläche (a) aber schon keine solche enthält. Daraus folgt, dass die gemeinsame Kurve K nur eine Raumkurve vierter Ordnung sein kann. Die drei Flächen (a), (b), (c) sind - wie man leicht zeigt - hyperbolische Paraboloide. In den Figuren 9 a, b, c sind diese Flächen einzeln mit ihrer gemeinsamen Kurve K in das Tetraeder $\mathcal{T}_1$ eingezeichnet.

Zu Figur 9 a. Die Horizontalschnitte von (a) sind gleichseitige Hyperbeln durch die Gerade $H_{14}Q_4$ einerseits und durch eine Parabel durch Q_4Q_5 in der Ebene $Q_4Q_5R_3$ andererseits.

Zu Figur 9 b. Die Schnitte von (b) mit den Ebenen $Y_1 = \text{const}$ sind gleichseitige Hyperbeln durch die Gerade Q_4Q_5 einerseits und durch eine Hyperbel in der Ebene $Q_4H_{14}R_3$ andererseits.

Zu Figur 9 c. Die Schnitte von (c) mit den Ebenen $Y_1 = \text{const}$ sind gleichseitige Hyperbeln durch eine Hyperbel in der Ebene $Q_4H_{14}Q_5$ einerseits und durch die Gerade Q_4R_3 andererseits.

Einen guten Einblick in die Art der durch die Flächen (a),(b),(c) begrenzten Teilräume innerhalb des Tetraeders $\mathfrak{T}_1$ vermittelt überdies der Schnitt dieser drei Flächen mit der Ebene durch die Kante $H_{14}R_3$ und durch den Punkt $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Die Gleichung dieser Ebene ist $Y_1 + Y_3 = 1$ und als Schnittkurven mit unseren drei Flächen ergeben sich, projiziert in die Y_1Y_2-Ebene zwei Hyperbeln und eine zerfallende Kurve zweiter Ordnung:

Projektion des Schnittes mit

(a) $Y_1Y_2 + Y_1 - 1 = 0$

(b) $Y_1(2\,Y_2 - 1) = 0$

(c) $Y_1Y_2 - 2\,Y_1 + 1 = 0$

Die Figur 10 stellt diese Kurven dar. Die wahre Gestalt der Schnittkurven zeigt Figur 10 a, welche aus Figur 10 durch affine Vergrößerung im Verhältnis $\sqrt{2}$ entsteht, wobei die Gerade $H_{14}R_3$ die Rolle der Affinitätsachse spielt. Der Schnitt mit dem Bereich $\mathfrak{A}_1$ ist schraffiert.

Die drei Flächen (a), (b), (c) teilen $\mathfrak{T}_1$ in sechs einfach zusammenhängende Bereiche auf, weil sie sich nur längs der Raumkurve vierter Ordnung schneiden und weil diese zwischen Q_4 und Q_5 keine Selbstüberschneidungen hat. Diese Bereiche sind es gerade, in welche $\mathfrak{A}_1$ bei den Transformationen von $\mathfrak{U}(3)$ übergeführt wird, wie aus den Ungleichungen des Beweises von Satz 9 folgt.

In $\mathfrak{A}_1$ haben wir somit einen Bereich, der bei zwei Transformationen - E und $(y_1,y_2)(y_3,y_4)T \cdot U(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$ in sich übergeht, bei den übrigen Transformationen von $\mathfrak{U}(3)$ je zweimal auf Bereiche abgebildet wird, die mit $\mathfrak{A}_1$ zusammen gerade $\mathfrak{F}_1$ erfüllen. Man braucht also, um zum Ende, zur Auffindung eines Fundamentalbereiches zu kommen, jetzt eine Fläche, welche $\mathfrak{A}_1$ in zwei Teile zerlegt, von denen der eine in den andern bei der obigen Transformation übergeht.

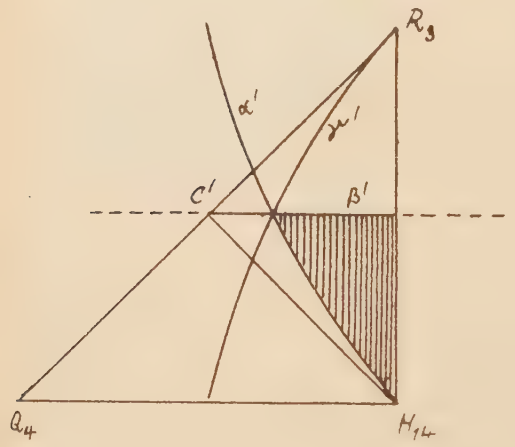


Fig. 10.

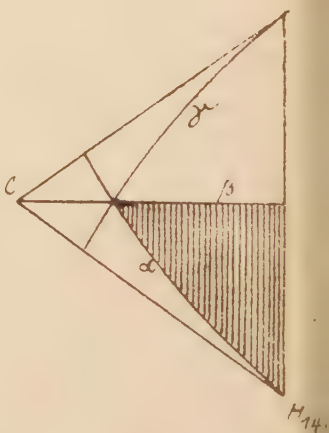


Fig. 10a

39) Satz 10. Die Fläche $y_2y_3-y_1y_2-y_3y_4+y_2y_4 = 0$ oder $Y_2Y_3-Y_1Y_2-Y_3+Y_2 = 0$ teilt $\mathfrak{A}_1$ in zwei Teile, die bei der Transformation

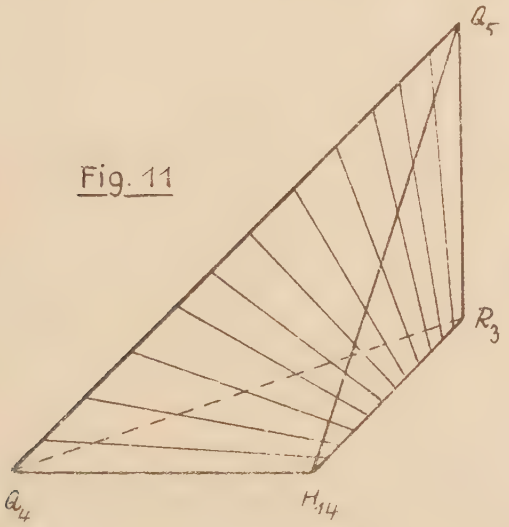
$$(y_1,y_2)(y_3,y_4)TU(y_1,y_2)TUT(y_1,y_2)$$

ineinander übergehen.

Beweis.

1) Die angegebene Fläche ist in inhomogenen kartesischen Koordinaten ein hyperbolisches Paraboloid, ihre Schnitte mit den Ebenen $Y_2 = \text{const}$ sind Geraden, welche einerseits die Gerade $Y_1 = 1$, $Y_3 = 0$; andererseits die Gerade $Y_1 = Y_2 = Y_3$ treffen (Figur 11). Diese Geradenschar dringt in $\mathfrak{k}_1$ ein, da ihre einzelnen Geraden von $H_{14}Q_3$ aus nach oben ($Y_3 > 0$) verlaufen. Die Fläche trifft also $\mathfrak{k}_1$ sicher in inneren Punkten.

Fig. 11



2) Die Ungleichung $y_2y_3 - y_1y_2 - y_3y_4 + y_2y_4 > 0$ geht bei der in Frage stehenden Transformation in $y_2y_2 - y_1y_2 - y_3y_4 + y_2y_4 < 0$ über. (Sie geht übrigens bei allen Transformationen von $\mathfrak{U}^{(3)}$ nur in eine dieser beiden Ungleichungen über.)

Unter Hinzunahme dieser letzten Ungleichung können wir nun die Bedingungen für die Punkte eines Fundamentalbereiches aufstellen.

Der Bereich $\mathfrak{A}$, festgelegt durch die Ungleichungen

1) $y_4 > y_1 > y_2 > y_3 > 0$ 2) $y_1y_2 - y_3y_4 > 0$

3) $y_2y_3 + y_1y_4 - y_1y_2 - y_2y_4 > 0$ 4) $y_2y_3 - y_1y_2 + y_2y_4 - y_3y_4 > 0$

stellt für die Gruppe $\mathfrak{G}^{(3)}$ einen Fundamentalbereich dar. Die Grenzen des Bereiches, welche die Unstetigkeitsstellen für die einzelnen Transformationen (Cremona Transformationen!) enthalten, sind aus diesem Grunde nicht in die Bereiche mit einbezogen.

40) Aus der Tatsache, dass $\mathfrak{U}^{(3)}$ eine Gruppe ist und seine Transformationen alle umkehrbar eindeutig sind, folgt, dass die Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf die Bereiche innerhalb $\mathfrak{F}_1$ lückenlos erfolgt. Aus den Feststellungen der Nr.35 folgt weiter, dass auch die Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf jedweden Bildbereich bei den Transformationen von $\mathfrak{G}^{(3)}$ lückenlos vor sich geht.

§ 9. Ausblick auf das Problem der Auffindung eines Fundamentalbereiches der Gruppe $\mathfrak{G}^{(n)}$ für $n > 3$.

41) Die Aufgabe wird in gewisser Beziehung schwieriger für $n > 3$, weil es nicht mehr möglich ist, die Bereiche darzustellen und die Überlegungen durch die Anschauung an der Figur zu stützen. Wir begnügen uns mit einigen Bemerkungen.

Die (n+1)-fachen Verhältnisse wird man auch hier als homogene Koordinaten eines Punktes im n-dimensionalen Raum deuten.

Zur Koordinatenbestimmung im R^n sei ein Grundeck, bestehend aus (n+1) Grundpunkten und dazu ein Einheitspunkt, alle (n+2) Punkte unabhängig, eingeführt. Die Punkte des Inneren des Grundecks sind ausgezeich-

net durch die Bedingung, dass alle ihre Koordinaten positiv (oder alle negativ) sind. Punkte, welche mindestens eine negative Koordinate haben, gehören einem äusseren Bereiche an. Solche äussere Bereiche, unterschieden nach der Anzahl der positiven und negativen Koordinaten, gibt es $n/2$ für gerades n, $\frac{n+1}{2}$ für ungerades n.

Zur weiteren Untersuchung greift man aus Analogiegründen den Bereich

$$y_{n+1} > y_1 > y_2 > y_3 \cdots > y_n > 0 \qquad (\mathfrak{A})$$

heraus. Er wird durch die Transformationen der Untergruppe $\mathcal{G}_2^{(n)}$ (Nr.18, § 4) in $(n+1)!$ andere Bereiche übergeführt, welche durch Bedingungen festgelegt sind, die vermöge aller möglichen Permutationen der y_1, y_2, y_3, y_4 .... y_{n+1}, aus der Bestimmungsungleichung für $(\mathfrak{A})$ hervorgehen. Diese Bildbereiche überdecken bis auf ihre Grenzen zusammen einmal das Innere des Grundecks.

Die Nebengruppe $\mathcal{G}_2^{(n)}T$ (§ 4, Nr.18) bildet $(\mathfrak{A})$ ein zweites Mal auf alle diese Bereiche ab, so dass man als Ergebnis erhält: Die Transformationen von $\mathcal{G}_1^{(n)}$ bilden $(\mathfrak{A})$ je zweimal lückenlos auf jeden der durch die $(n+1)!$ Ungleichungen festgelegten Bereiche ab und diese Bereiche erfüllen zusammen das Innere des Grundecks.

Im weiteren hat man noch zu verfolgen, wie $(\mathfrak{A})$ bei den Transformationen, welche Nebengruppen von $\mathcal{G}_1^{(n)}$ liefern (§ 4, Nr.19) abgebildet wird. Es stellt sich heraus, dass der Bereich $(\mathfrak{A})$ durch die Transformationen von $\mathcal{G}^{(n)}$ je $\left[(n+3)! : \frac{(n+2)!}{2}\right] = 2(n+3)$ mal auf Bereiche abgebildet wird, welche durch Ungleichungen der Form:

$$Y_{\lambda_1} < Y_{\lambda_2} < \ldots\ldots < Y_{\lambda_\nu} < 0 < Y_{\lambda_{\nu+1}} < \ldots\ldots < Y_{\lambda_{n+1}}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_{n+1}) = (1, 2, \ldots., n+1)$$

$$\nu + 1 = (1, 2, \ldots, \frac{n+2}{2}) \quad \text{für } n = 2p$$

$$\nu + 1 = (1, 2, \ldots, \frac{n+3}{2}) \quad \text{für } n = 2p + 1$$

bestimmt sind. Es gibt natürlich auch 2 (n+3) Transformationen, die den Bereich $(\mathfrak{A})$ jeweils auf sich abbilden und diese Transformationen bilden auf Grund der Selbstabbildung von $(\mathfrak{A})$ eine Untergruppe $\mathfrak{U}^{(n)}$ von $\mathfrak{G}^{(n)}$.

Innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{A})$ nun einen Teilbereich, der bei den Transformationen von $\mathfrak{U}^{(n)}$ in solche 2(n+3) Bereiche übergeht, die zusammen $(\mathfrak{A})$ einmal lückenlos überdecken, einen Bereich also, der für die Gruppe $\mathfrak{G}^{(n)}$ ein Fundamentalbereich ist, zu finden, das ist die noch ungelöste Seite des Problems für $n > 3$.

Ich darf an dieser Stelle allen meinen Lehrern, die mir bei meinem Bildungsgang fördernd zur Seite standen, danken. Herrn Geheimrat Professor Dr. H. T i e t z e bin ich für die Überlassung des Themas der vorliegenden Arbeit und für die Unterstützung, die er mir bei ihrer Anfertigung jederzeit angedeihen ließ, zu besonderem Dank verpflichtet.

Lebenslauf.

Am 7. November 1911 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Paul Etzel in München geboren. Nach Besuch der Volks- und Realschule in München erwarb ich im Frühjahr 1930 an der Luitpold-Oberrealschule zu München das Zeugnis der Reife. Im Sommersemester 1930 bezog ich die Universität München zum Studium der Mathematik und Physik und schloss meine Studien im März 1934 mit dem ersten Teil der Prüfung für das höhere Lehramt ab. Ein Jahr später, nach Ablegung auch des zweiten Teiles der Lehramtsprüfung, begann ich meine berufliche Tätigkeit als Studienassessor und gegenwärtig befinde ich mich in dieser Eigenschaft an der Aufbauschule Freising.